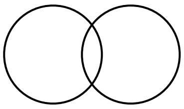
Teil A

1. Eine Skizze veranschaulicht die Situation:



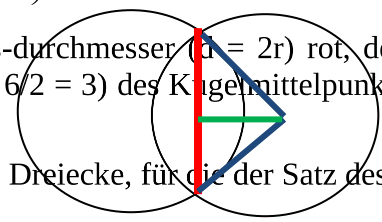
Beide Kugeln schneiden sich, wenn der Abstand der Mittelpunkte kleiner ist als die Summe der Radien, hier also kleiner als 10.

$$\left|\overrightarrow{M_1M_2}\right| = \left|\begin{pmatrix} -3-1 \\ -2-2 \\ 1-3 \end{pmatrix}\right| = \left|\begin{pmatrix} -4 \\ -4 \\ -2 \end{pmatrix}\right| = \sqrt{(-4)^2+(-4)^2+(-2)^2} = \sqrt{36} = 6 < 10$$

b) Der Mittelpunkt des Kreises ist Mittelpunkt der Strecke zwischen den beiden Kugelmittelpunkten, also:

$$\vec{M} = \frac{\overrightarrow{M_1} + \overrightarrow{M_2}}{2} = \frac{\begin{pmatrix} -3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}}{2} = \frac{\begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}}{2} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$, also M(–1 | 0 | 2)

In nebenstehender Skizze ist der Kreis-durchmesser (d = 2r) rot, der Radius (R = 5) der Kugel blau und der Abstand (d = 6/2 = 3) des Kugelmittelpunkts vom Kreismittelpunkt grün dargestellt



Es ergeben sich also zwei rechtwinklige Dreiecke, für die der Satz des Pythagoras gilt:

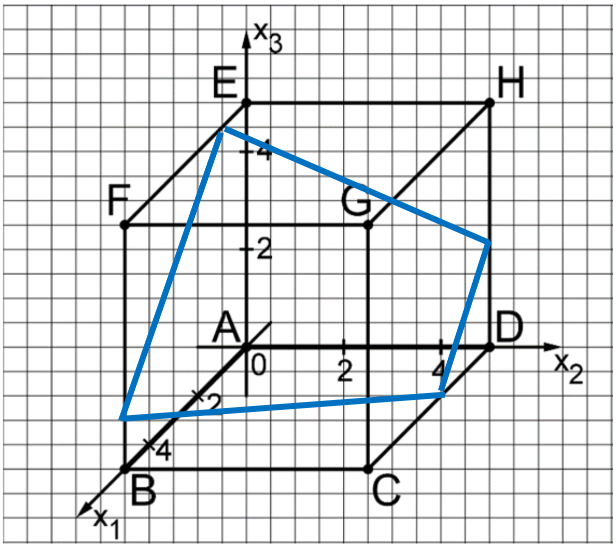
$3^2 + r^2 = 5^2$, also r = 4

2. a) Der Punkt hat drei gleiche Koordinaten, also z.B. alle werden mit a bezeichnet und in die Ebene eingesetzt

$3a + 2a + 2a = 6$ => $7a = 6$ => $a = \frac{6}{7}$ $\Rightarrow$ $P\left(\frac{6}{7}\middle|\frac{6}{7}\middle|\frac{6}{7}\right)$

b) Alle Punkte mit dieser Eigenschaft liegen auf genau einer Gerade im Koordinatensystem. Sämtliche Ebenen, die zu dieser Gerade parallel sind, erhalten keinen dieser Punkte. Da unendlich viele Ebenen zu einer Geraden parallel sind, stimmt die Aussage.

Teil B



a) Man muss also zeigen, dass die Seiten [JK] und [LI] parallel sind und die Seiten [IJ] und [KL] dieselbe Länge besitzen:

$$\overrightarrow{JK}=\begin{pmatrix}0-2\\5-5\\2-0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2\\0\\2\end{pmatrix}\quad \overrightarrow{LI}=\begin{pmatrix}5-1\\0-0\\1-5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4\\0\\-4\end{pmatrix}\Rightarrow \overrightarrow{LI}=-2\cdot\overrightarrow{JK}$$, also sind die Vektoren parallel.

$$\left|\overrightarrow{IJ}\right|=\left|\begin{pmatrix}2-5\\5-0\\0-1\end{pmatrix}\right|=\left|\begin{pmatrix}-3\\5\\-1\end{pmatrix}\right|=\sqrt{9+25+1}=\sqrt{35};\quad \left|\overrightarrow{KL}\right|=\left|\begin{pmatrix}1-0\\0-5\\5-2\end{pmatrix}\right|=\left|\begin{pmatrix}1\\-5\\3\end{pmatrix}\right|=\sqrt{1+25+9}=\sqrt{35}$$

Die Seiten haben dieselbe Länge.

b) Als RV der Ebene eignet sich jeweils ein Vielfaches der Seitenvektoren des Trapezes, die nicht parallel sind, also z.B. der Vektoren $\overrightarrow{JK}$ und $\overrightarrow{IJ}$, die in a) berechnet wurden, als Aufhängepunkt einer der vier Eckpunkte, hier z.B. I:

$$\vec{u}\times\vec{v}=\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}3\\-5\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0+5\\-[-1-3]\\5-0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5\\4\\5\end{pmatrix}=\vec{n}$$

$$\vec{n}\circ\left(\vec{X}-\vec{I}\right)=0$$

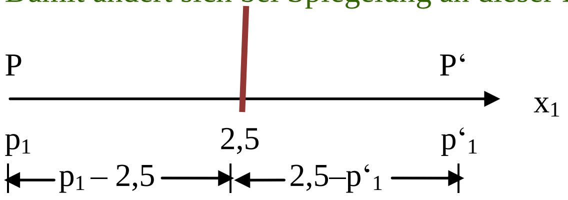
$$\begin{pmatrix}5\\4\\5\end{pmatrix}\circ\left(\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}5\\0\\1\end{pmatrix}\right)=0$$ Damit: T: $5x_1 + 4x_2 + 5x_3 - 30 = 0$

c) Der Mittelpunkt hat die Koordinaten M(2,5 | 5 | 2,5) (aus der Abb. ermitteln)
Einsetzen von M in die Gerade:

$$\begin{pmatrix}2,5\\5\\2,5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2,5\\0\\3,5\end{pmatrix}+\lambda\cdot\begin{pmatrix}0\\-10a\\\frac{2}{a}\end{pmatrix}\begin{matrix}\Rightarrow\ 0=0(\text{w})\\\Rightarrow 5=-10\lambda a\Rightarrow\qquad 1=-2\lambda a\\\Rightarrow\quad -1=\frac{2\lambda}{a}\ \Rightarrow -a=2\lambda\Rightarrow\lambda=-0,5a\end{matrix}$$

λ aus der III. Gleichung in die II. einsetzen: 1 = a² Da $a \in \mathrm{IR}^+$, folgt: a = 1 ist die einzige Lösung

d) Die Ebene U ist parallel zur x_2x_3-Ebene im Abstand 2,5, halbiert also den Würfel.
Damit ändert sich bei Spiegelung an dieser Ebene nur die x_1-Koordinate:



Die beiden Abstände sind gleich, also $p_1 - 2,5 = 2,5 - p'_1$ => $p'_1 = 5 - p_1$
Also $P'(5 - p_1 \mid p_2 \mid p_3)$

e) g_a in T: $5x_1 + 4x_2 + 5x_3 - 30 = 0$ einsetzen:

$$5\cdot 2,5 + 4\cdot(-10\lambda a) + 5\cdot\left(3,5+\frac{2\lambda}{a}\right) - 30 = 0$$

$$12,5 - 40\lambda a + 17,5 + \frac{10\lambda}{a} - 30 = 0$$

$-40\lambda a + \frac{10\lambda}{a} = 0$ => $40\lambda a = \frac{10\lambda}{a}$ => $4\lambda a = \frac{\lambda}{a}$ Für $\lambda \neq 0$ kann man durch λ dividieren:

$4a = \frac{1}{a}$ => $4a^2 = 1$ => $a^2 = 0,25$ => $a = 0,5$ (nur eine Lösung wegen $a \in \mathrm{IR}^+$)
Für $\lambda = 0$ erhält man den Aufhängepunkt, der auch in der Ebene T liegt.

Die Schnittgerade von T und T‘ liegt auf der Ebene, an der gespiegelt wird, also auf U. Wenn die Gerade g_a also auch auf T liegt, liegt sie auf T und U (nach Voraussetzung) und stellt damit die Schnittgerade dar.

f) Die Spitze hat die Koordinaten (5|s|5) mit $0 \leq s \leq 5$ (vgl. Abbildung)

Die Höhe ist der Abstand der Spitze von der Grundebene der Pyramide. Diese Ebene ist die Ebene T. Also muss man S in die linke Seite der HNF von T einsetzen:

$$\left|\vec{n}\right| = \left|\begin{pmatrix}5\\4\\5\end{pmatrix}\right| = \sqrt{25+16+25} = \sqrt{66} \qquad \mathrm{T}: \frac{5x_1+4x_2+5x_3-30}{\sqrt{66}} = 0\ (\text{HNF})$$

Abstand bzw. Pyramidenhöhe: $h = \left|\frac{5\cdot 5+4\cdot s+5\cdot 5-30}{\sqrt{66}}\right| = \left|\frac{20+4\cdot s}{\sqrt{66}}\right|$

Da für s gilt: $0 \leq s \leq 5$, liegt die Länge der Höhe zwischen den Werten

$\left|\frac{20+4\cdot 0}{\sqrt{66}}\right| = \frac{20}{\sqrt{66}} \approx 8{,}1$ und $\left|\frac{20+4\cdot 5}{\sqrt{66}}\right| = \frac{40}{\sqrt{66}} \approx 16{,}2$

Es reicht auch zu argumentieren, dass der Wert 8,1 der kleinste Wert ist, den die Länge der Höhe annimmt.

Also: Sie kann nicht den Wert 2 annehmen.

