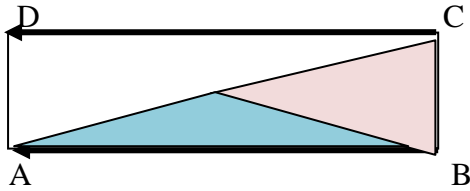


**Teil A**

1. Gegeben ist ein Rechteck ABCD mit den Eckpunkten A(5 | -4 | -3), B(5 | 4 | 3), C(0 | 4 | 3) und D.



- a) Aus der Skizze erkennt man, dass man D auf folgende Weise berechnen kann:

$$\vec{D} = \vec{C} + \vec{BA} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5-5 \\ -4-4 \\ -3-3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -8 \\ -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ -3 \end{pmatrix} \quad \text{Also: } D(0 | -4 | -3)$$

$$\vec{M} = \frac{\vec{A} + \vec{C}}{2} = \frac{\begin{pmatrix} 5 \\ -4 \\ -3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}}{2} = \frac{\begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}{2} = \begin{pmatrix} 2,5 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{Also: } M(2,5 | 0 | 0)$$

- b) Für Dreieck BCM gilt:  $g = \overline{CB}$  und  $h = \frac{1}{2}\overline{AB}$ , also:  $A = \frac{1}{2} \cdot \overline{CB} \cdot \frac{1}{2}\overline{AB} = \frac{1}{4} \cdot \overline{CB} \cdot \overline{AB}$

Für Dreieck ABM gilt:  $g = \overline{AB}$  und  $h = \frac{1}{2}\overline{CB}$ , also:  $A = \frac{1}{2} \cdot \overline{AB} \cdot \frac{1}{2}\overline{CB} = \frac{1}{4} \cdot \overline{CB} \cdot \overline{AB}$

Beide Terme sind gleich.

2. a) Der Punkt hat drei gleiche Koordinaten, also z.B. alle werden mit a bezeichnet und in die Ebene eingesetzt

$$3a + 2a + 2a = 6 \Rightarrow 7a = 6 \Rightarrow a = \frac{6}{7} \Rightarrow P\left(\frac{6}{7} \mid \frac{6}{7} \mid \frac{6}{7}\right)$$

- b) Alle Punkte mit dieser Eigenschaft liegen auf genau einer Gerade im Koordinatensystem. Sämtliche Ebenen, die zu dieser Gerade parallel sind, erhalten keinen dieser Punkte. Da unendlich viele Ebenen zu einer Geraden parallel sind, stimmt die Aussage.

**Teil B**

$$a) |\overline{PQ}| = \left| \begin{pmatrix} 1 & -0 \\ 1 & -0 \\ -3,5 & +1 \end{pmatrix} \right| = \left| \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2,5 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{1^2 + 1^2 + (-2,5)^2} = \sqrt{8,25} \approx 2,872$$

Die Strecke [AP] hat die Länge 1. Der Bohrkanal ist also insgesamt 3,872 km = **3872 m lang**

$$b) \cos \alpha = \frac{|\overline{PA} \circ \overline{PQ}|}{|\overline{PA}| \cdot |\overline{PQ}|} = \frac{\left| \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ +1 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2,5 \end{pmatrix} \right|}{1 \cdot \sqrt{8,25}} = \frac{+2,5}{\sqrt{8,25}} \approx 0,87 \Rightarrow \alpha \approx 29,5^\circ$$

RV der Gerade PQ muss also zur Ermittlung des Normenvektors der Ebene verwendet werden.

$$\overline{PQ} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2,5 \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{n} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -5 \end{pmatrix}$$

$$\vec{n} \circ (\vec{X} - \vec{Q}) = 0$$

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -5 \end{pmatrix} \circ \left( \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -3,5 \end{pmatrix} \right) = 0 \quad \text{Damit: } E: 2x_1 + 2x_2 - 5x_3 - 21,5 = 0$$

Das Kontrollergebnis erhält man durch Multiplikation der Gleichung mit 2.

d) Der Punkt R liegt also auf der Gerade PQ und hat die  $x_3$ -Koordinate  $-3,6$ .  $R(r_1|r_2|-3,6)$  wird also in die Gerade eingesetzt:

$$PQ: \vec{X} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -3,5 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2,5 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \\ -3,6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -3,5 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2,5 \end{pmatrix}$$

Aus der 3. Zeile ergibt sich:  $-3,6 = -3,5 - 2,5 \lambda \Rightarrow -0,1 = -2,5 \lambda \Rightarrow \lambda = 0,04$

Damit ergeben sich aus Zeile 1 und 2:  $r_{1|2} = 1 + 0,04 = 1,04$ , Also:  **$R(1,04|1,04|-3,6)$**

Dicke der wasserführenden Schicht:

$$|\overline{RQ}| = \left| \begin{pmatrix} 1 & -1,04 \\ 1 & -1,04 \\ -3,5 & +3,6 \end{pmatrix} \right| = \left| \begin{pmatrix} -0,04 \\ -0,04 \\ -0,1 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{(-0,04)^2 + (-0,04)^2 + (-0,1)^2} = \sqrt{0,132} \approx 0,1149$$

Die Schicht ist also **115 m dick**.

- e) Der zweite BohrkanaI wird durch die Gerade  $b$  beschrieben, die als Aufhängepunkt den Punkt  $B$  und als RV einen zur Erdoberfläche (also zur  $x_1x_2$ -Ebene) senkrechten Vektor besitzt.

$$b: \vec{X} = \begin{pmatrix} t \\ -t \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Diese Gerade muss mit der Oberseite der wasserführenden Gesteinsschicht, also der Ebene  $E$  ( $E: 2x_1 + 2x_2 - 5x_3 - 21,5 = 0$ ) geschnitten werden:

$$b \text{ in } E: 2t - 2t - 5(0 + \lambda) - 21,5 = 0 \Rightarrow 5\lambda = -21,5 \Rightarrow \lambda = 4,3$$

$$\lambda \text{ in } b: \vec{T} = \begin{pmatrix} t \\ -t \\ 0 \end{pmatrix} - 4,3 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t \\ -t \\ -4,3 \end{pmatrix}$$

Also:  $T(t \mid -t \mid -4,3)$

Es ergibt sich damit, dass der BohrkanaI stets 4,3 km lang ist, die Lage der Bohrstelle also keinen Einfluss auf die Länge des BohrkanaIs hat.

- f) Gesucht ist der Abstand der beiden Punkte  $T(t \mid -t \mid -4,3)$  und  $Q(1 \mid 1 \mid -3,5)$ :

$$\begin{aligned} |\overline{TQ}| &= \left| \begin{pmatrix} 1 - t \\ 1 + t \\ -3,5 + 4,3 \end{pmatrix} \right| = \left| \begin{pmatrix} 1-t \\ 1+t \\ 0,8 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{(1-t)^2 + (1+t)^2 + 0,8^2} = \sqrt{1 - 2t + t^2 + 1 + 2t + t^2 + 0,64} = \\ &= \sqrt{2t^2 + 2,64} \geq \sqrt{2,64} \approx 1,6 \quad (\text{der kleinste Wert, den } t^2 \text{ annehmen kann, ist } 0) \end{aligned}$$

Damit ist der Abstand auf jeden Fall größer als 1,5 km.