Teil A

1. Gegeben ist die Funktion $x \mapsto \sqrt{x+1}-2$ mit maximaler Definitionsmenge D.

a) **Definitionsmenge** BWL Skript Kurvendiskussion 1.

W: $x + 1 \geq 0$ => $x \geq -1$ $D = [-1; +\infty[$

b) Tangentengleichung Skript Kurvendiskussion 5.

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x+1}}$$

$x_o = 8$

$f(x_o) = \sqrt{8+1}-2 = \sqrt{9}-2 = 3-2 = 1$

$$f'(x_o) = \frac{1}{2\sqrt{8+1}} = \frac{1}{2\sqrt{9}} = \frac{1}{6}$$

Über Geradengleichun

$y = mx + t$

$1 = \frac{1}{6} \cdot 8 + t$

$t = 1 - \frac{4}{3} = -\frac{1}{3}$

oder über Formel

$y = \frac{1}{6}(x-8) + 1$

$y = \frac{1}{6}x - \frac{4}{3} + 1$

$$y = \frac{1}{6}x - \frac{1}{3}$$

2. Gegeben ist die in $IR\backslash\{0\}$ definierte Funktion $f\colon x \mapsto 1-\frac{1}{x^2}$, die die Nullstellen $x_1 = -1$ und $x_2 = 1$ hat. Abbildung 1 zeigt den Graphen von f, der symmetrisch bezüglich der y-Achse ist. Weiterhin ist die Gerade g mit der Gleichung $y = -3$ gegeben.

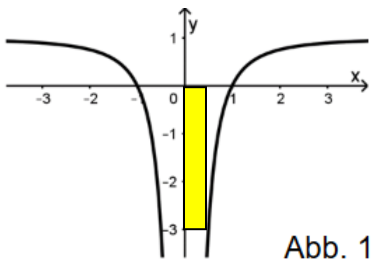


Abb. 1

a) $-3 = 1-\frac{1}{x^2} \Rightarrow -4 = -\frac{1}{x^2} \Rightarrow x^2 = \frac{1}{4} \Rightarrow x_{1|2} = \pm\frac{1}{2}$

Einfachere Alternative: $\frac{1}{2}$ in den Funktionsterm einsetzen. $f\left(\frac{1}{2}\right) = -3$

b) Wegen der Symmetrie betrachtet man den Inhalt der Fläche rechts der y-Achse und verdoppelt diesen. Zwischen den x-Werten 0 und 0,5 handelt es sich um ein Rechteck mit $A_R = 0{,}5 \cdot 3 = 1{,}5$ und zwischen 0,5 und 1 um das Integral

$$\left|\int_{0,5}^{1}\left(1-\frac{1}{x^2}\right)dx\right| = \left|\int_{0,5}^{1}\left(1-x^{-2}\right)dx\right| = \left|\left[x+x^{-1}\right]_{0,5}^{1}\right| = \left|\left[1+1^{-1}\right]-\left[0{,}5+(0{,}5)^{-1}\right]\right| =$$

$= \left|2-[0{,}5+2]\right| = 0{,}5$ => $A = 2 \cdot (1{,}5 + 0{,}5) = 4$

3. a) $p_k(2) = -3$

   $k \cdot 2^2 - 4 \cdot 2 - 3 = -3$

   $4k - 8 - 3 = -3$

   $4k = 8 \;\Rightarrow\; k = 2$

   b) Kurvenscharen (Stellen und ihre Anzahl): Skript §16

   Nullstellen: $kx^2 - 4x - 3 = 0$

   Hier einfacher über die Diskriminante D < 0 (Term unter der Wurzel in der Lösungsforme)l

   $D = b^2 - 4ac \;\Rightarrow\; D = (-4)^2 - 4k \cdot (-3) = 16 + 12k$

   $16 + 12k < 0 \;\Rightarrow\; k < -\frac{4}{3}$

4.

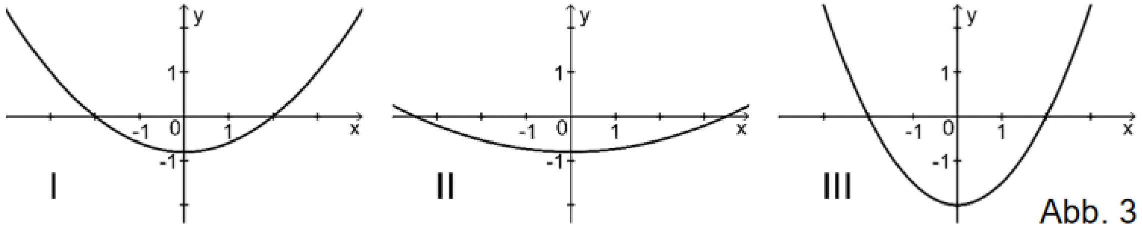


Abb. 3

a) Die Extremstellen von f liegen bei x = 2 und x = –2. Dort muss die Ableitung den Wert ß haben. In Graph II ist dies nicht der Fall.
Die Steigung im Punkt (0|0) ist vom Betrag ungefähr eins, der Wert der Ableitung muss also für x = 0 etwa –1 sein. In Graph III ist der Wert aber –2.
Damit kommt nur Graph I infrage.

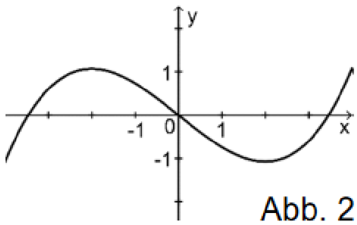


Abb. 2

b) Im angegebenen Intervall liegt der Graph von f = F‘ unterhalb der x-Achse, F‘ ist also negativ. Damit nimmt die Funktion F streng monoton ab.

Teil B

a) Ein Bruch ist Null, wenn sein Zähler Null ist, also 4x = 0 => x = 0 ist die einzige Nullstelle.

Senkrechte Asymptote: x = –1 Rationale Funktion Asymptoten Skript §02

Zählergrad ist kleiner als der Nennergrad, also ist y = 0 waagrechte Asymptote.

b) $f(x)=\frac{4x}{(x+1)^2}$ Quotientenregel Skript §05

$$f'(x)=\frac{(x+1)^2\cdot 4-2(x+1)\cdot 4x}{(x+1)^4}=\frac{(x+1)\left[(x+1)\cdot 4-2\cdot 4x\right]}{(x+1)^4}=\frac{4x+4-8x}{(x+1)^3}=\frac{-4x+4}{(x+1)^3}$$

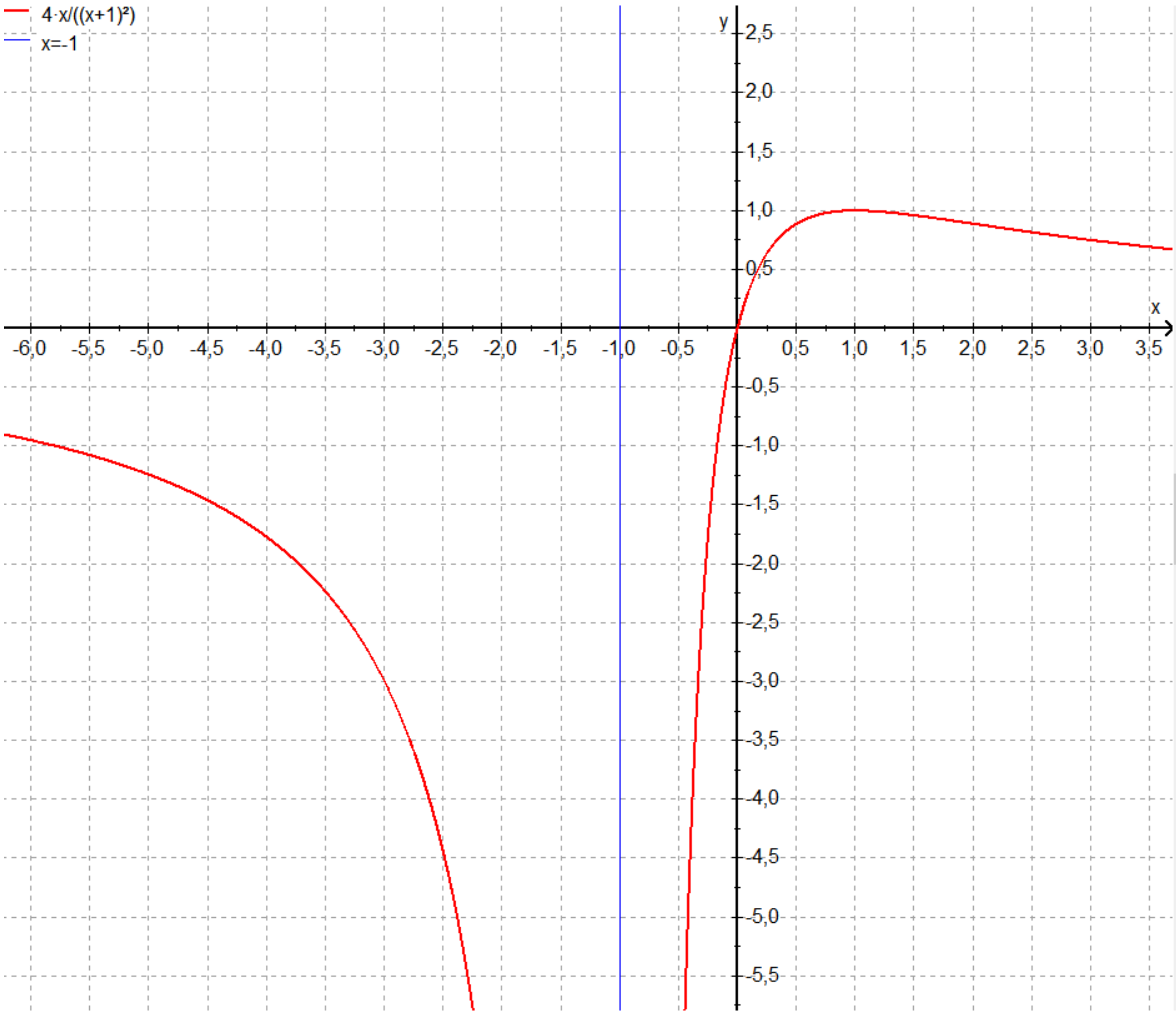
f'(x) = 0 => –4x + 4 = 0 => x = 1 => $y=f(1)=\frac{4\cdot 1}{(1+1)^2}=\frac{4}{2^2}=\frac{4}{4}=1$

f' hat an der Stelle x = 1 einen VZW von + nach –, also: Hochpunkt H(1|1)

c) Wegen des Quadrats im Nenner ist der Nenner stets positiv. Da der Zähler für negative x-Werte negativ ist, ist f für x < 0 negativ und der Graph verläuft unter der x-Achse.

Wertetabelle im TR: f(–6) = –1,25 f(–5) = –1,25

f(–4) ≈ –1,8 f(–3) = –3 f(–2) = –8 (nicht einzeichenbar)



d) F: $x \mapsto 4\cdot\ln(x+1)+\frac{4}{x+1}$

$$F'(x)=\frac{4}{x+1}+\frac{(x+1)\cdot 0-1\cdot 4}{(x+1)^2}=\frac{4(x+1)}{(x+1)^2}+\frac{-1\cdot 4}{(x+1)^2}=\frac{4x+4-4}{(x+1)^2}=\frac{4x}{(x+1)^2}=f(x)$$

F ist also Stammfunktion von f.

e) 30 Minuten sind 0,5 Stunden, also $f(0,5)=\frac{4\cdot 0,5}{(0,5+1)^2}=\frac{2}{1,5^2}\approx 0,89\left(\frac{mg}{l}\right)$

Maximum ist y = 1 (s. Hochpunkt), also ist die maximal auftretende Wirkstoffkonzentration $1\frac{mg}{l}$ (2)

f) Man müsste die 2 Ableitung von f bilden, zeigen, dass f''(2) = 0 und einen VZW hat.

Hier ist die Steigung des Graphen von f extremal. Das heißt, die Abnahme der Wirkstoffkonzentration ist zum Zeitpunkt 2 Stunden nach Einnahme am größten.

g) $$A(b)=\int_0^b f(x)dx=\left[4\cdot\ln(x+1)+\frac{4}{x+1}\right]_0^b=\left[4\cdot\ln(b+1)+\frac{4}{b+1}\right]-\left[4\cdot\ln(0+1)+\frac{4}{0+1}\right]=$$

$$=4\cdot\ln(b+1)+\frac{4}{b+1}-\left[4\cdot\ln(1)+\frac{4}{1}\right]=4\cdot\ln(b+1)+\frac{4}{b+1}-4$$

$$\lim_{b\to+\infty}\left[4\cdot\underbrace{\ln(b+1)}_{\to+\infty}+\underbrace{\frac{4}{b+1}}_{\to 0}-4\right]=+\infty$$

Flächenstück ist nicht endlich, also keine realistische Beschreibung.

h) f(x) = 0,75 => $\frac{4x}{(x+1)^2}=0,75$ => $4x = 0,75(x+1)^2$ => $4x = 0,75(x^2+2x+1)$

$4x = 0,75x^2 + 1,5x + 0,75$ => $0,75x^2 - 2,5x + 0,75 = 0$

$$x_{1|2}=\frac{2,5\pm\sqrt{6,25-4\cdot 0,75\cdot 0,75}}{1,5}=\frac{2,5\pm\sqrt{6,25-4\cdot 0,75\cdot 0,75}}{1,5}=\frac{2,5\pm\sqrt{5,5}}{1,5}$$

$x_1 \approx 3,23$ $x_2 \approx 0,1$ bei x2 steigt die Konzentration noch, also spätestens 3,23 Stunden nach der ersten Einnahme.

i) Der Zeitpunkt der Einnahme verschiebt den Graphen von f in positive x-Richtung um 2,5. Benötigt wird also f(x – 2,5). Dieser Term wird zur bisherigen Konzentration f(x) addiert, also hat man (B) f(x) + f(x – 2,5)

j) $$k'(x)=\frac{(e^{2x}+1)\bullet(3\cdot e^{2x}\cdot 2)-(e^{2x}\cdot 2)\bullet(3\cdot e^{2x})}{(e^{2x}+1)^2}=\frac{6e^{2x}(e^{2x}+1)-6e^{4x}}{(e^{2x}+1)^2}=\frac{6e^{4x}+6e^{4x}-6e^{4x}}{(e^{2x}+1)^2}=\frac{6e^{4x}}{(e^{2x}+1)^2}$$

Zähler und Nenner sind positiv, also ist k'(x) > 0 für $x \in IR$ und so ist der Graph von k streng monoton steigend.

k) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{3\cdot e^{2x}}{e^{2x}+1}-1,5\right)=\frac{3}{1}-1,5=1,5$ (Quotient der Leitkoeffizienten im Bruch)

Wegen der Monotonie ist der Wert von f stets unterhalb des Grenzwertes. Dieser beträgt 0,75·2. Damit liegt der der Wert immer mehr als 25% unter der gesundheitsschädlichen Grenze.

Nach 60 Minuten (x = 1 (Stunde)) gilt:

$f(1)=\frac{3\cdot e^{2}}{e^{2}+1}-1,5\approx 1,1>0,75$ Wegen der Monotonie bleibt der Wert also stets größer als $0,75\,\frac{mg}{l}$.

Beide Bedingungen sind erfüllt.