Teil A

1. $f'(x) = \frac{x \cdot e^{2x} \cdot 2 - 1 \cdot e^{2x}}{x^2} = \frac{2x \cdot e^{2x} - e^{2x}}{x^2} = \frac{e^{2x} \cdot (2x-1)}{x^2}$

$f'(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{1}{2}2 \quad \Rightarrow y = f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{e}{\frac{1}{2}} = 2e$

Da alle Faktoren für $x \in IR$ positiv sind, außer der Faktor $(x – 2)$, der bei $x = 2$ einen VZW von – nach + hat, hat auch f' dort einen VZW von – nach +, es liegt also ein Tiefpunkt vor.

$T\left(\frac{1}{2}\middle|2e\right)$

2. a) $-3 = 1 - \frac{1}{x^2} \quad \Rightarrow \quad -4 = -\frac{1}{x^2} \quad \Rightarrow \quad x^2 = \frac{1}{4} \quad \Rightarrow \quad x_{1|2} = \pm\frac{1}{2}$

<u>Einfachere Alternative:</u> $\frac{1}{2}$ in den Funktionsterm einsetzen. $f\left(\frac{1}{2}\right) = -3$

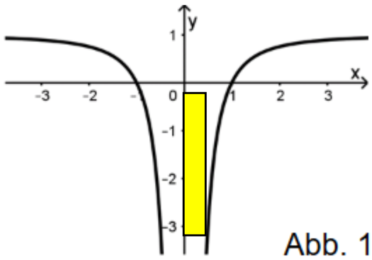


Abb. 1

b) Wegen der Symmetrie betrachtet man den Inhalt der Fläche rechts der y-Achse und verdoppelt diesen. Zwischen den x-Werten 0 und 0,5 handelt es sich um ein Rechteck mit $A_R = 0{,}5 \cdot 3 = 1{,}5$ und zwischen 0,5 und 1 um das Integral

$$\left|\int_{0,5}^{1}\left(1-\frac{1}{x^2}\right)dx\right| = \left|\int_{0,5}^{1}\left(1-x^{-2}\right)dx\right| = \left|\left[x+x^{-1}\right]_{0,5}^{1}\right| = \left|\left[1+1^{-1}\right]-\left[0{,}5+(0{,}5)^{-1}\right]\right| =$$

$$= \left|2-\left[0{,}5+2\right]\right| = 0{,}5$$

$A = 2 \cdot (1{,}5 + 0{,}5) = 4$

3.

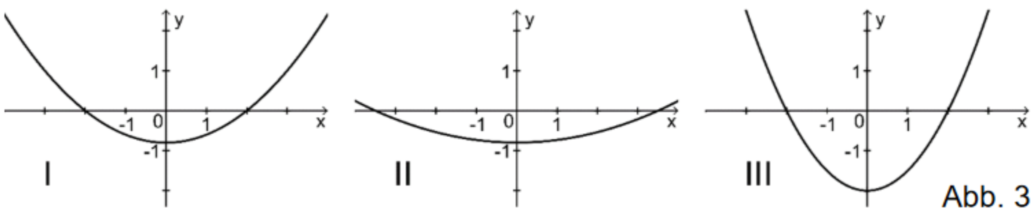


Abb. 3

a) Die Extremstellen von f liegen bei x = 2 und x = –2. Dort muss die Ableitung den Wert ß haben. In Graph II ist dies nicht der Fall.
Die Steigung im Punkt (0|0) ist vom Betrag ungefähr eins, der Wert der Ableitung muss also für x = 0 etwa –1 sein. In Graph III ist der Wert aber –2.
Damit kommt nur Graph I infrage.

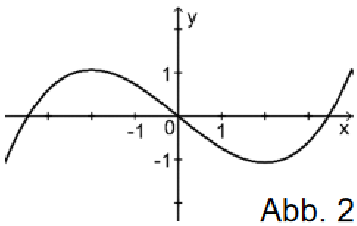
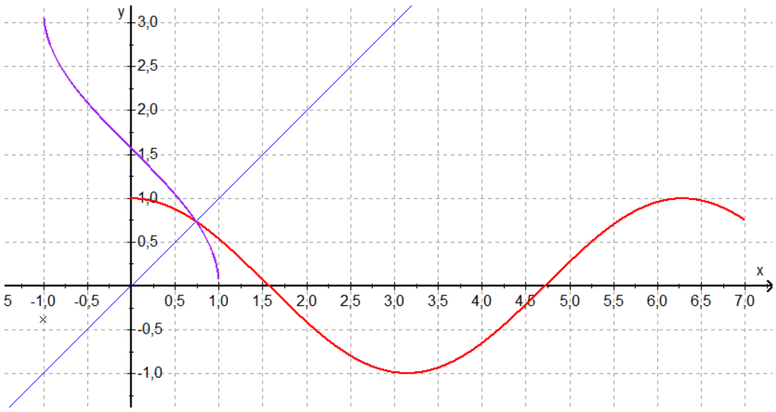


Abb. 2

b) Im angegebenen Intervall liegt der Graph von f = F‘ unterhalb der x-Achse, F‘ ist also negativ. Damit nimmt die Funktion F streng monoton ab.

4. a) Wenn die Funktion streng monoton ist, dann ist sie umkehrbar. Für $x \in [0;\pi]$ ist f streng monoton abnehmend. Also $k = \pi$



b) Der Graph darf die Gerade y = x nicht schneiden. So könnte man z.B eine zu y = x parallele Gerade nehmen, also: j(x) = x – 2

Teil B

1. a) **Definitionsmenge** BWL Skript Kurvendiskussion 1.

L: $x - 1 > 0 \quad => \quad x > 1$ $\qquad$ $D =]1; +\infty[$

Grenzverhalten Verbotene Rechnungen: Skript Kurvendiskussion 4.

$$\lim_{x \to 1} f(x) = \lim_{x \to 1}\left[2 - \underbrace{\ln\overset{\to 0}{(x-1)}}_{\to -\infty}\right] = +\infty$$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty}\left[2 - \underbrace{\ln\overset{\to +\infty}{(x-1)}}_{\to +\infty}\right] = -\infty$$

b) **Nullstellen** Skript Kurvendiskussion 2.

$2 - \ln(x-1) = 0 \;=>\; -\ln(x-1) = -2 \;=>\; \ln(x-1) = 2 \mid e^{\cdots} \;=>\; x - 1 = e^2 \;=>$

$=> \quad x = e^2 + 1$

c) Zuerst Verschiebung in negative x-Richtung (nach links) um 1, dann Spiegelung an x-Achse, dann Verschiebung um 2 in positive y-Richtung (nach oben).

Da der streng monoton steigende Graph von $x \mapsto \ln x$ an der x-Achse gespiegelt wird, ist der Graph von f streng monoton fallend.

d) $F'(x) = 3 - \left[1 \cdot \ln(x-1) + (x-1) \cdot \frac{1}{x-1}\right] = 3 - [\ln(x-1) + 1] = 2 - \ln(x-1) = f(x)$

Also ist F Stammfunktion von f.

Nullstelle:

Alle Stammfunktionen unterscheiden sich um die additive Konstante +C, also

$F_C(x) = 3x - (x-1) \cdot \ln(x-1) + C$

$x = 2$ ist Nullstelle, also $F_C(2) = 0$:

$3 \cdot 2 - (2-1) \cdot \ln(2-1) + C = 0$

$6 - 1 \cdot \ln(1) + C = 0$

$6 - 0 + C = 0 \;=>\; C = -6$

Also: $F(x) = 3x - (x-1) \cdot \ln(x-1) - 6$

2.

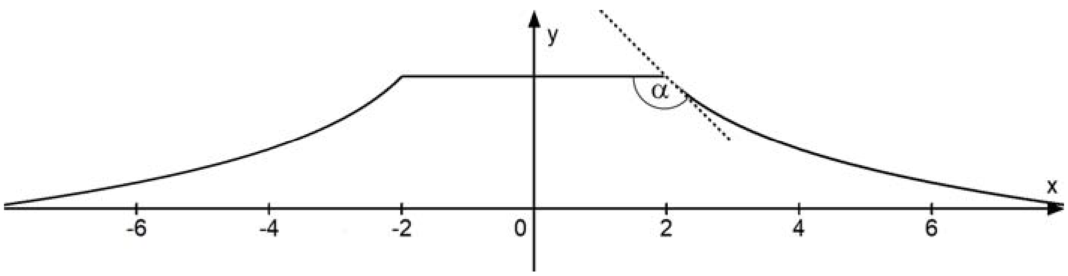


Abb. 2

a) Der Funktionswert f(2) beschreibt die Höhe des Plateaus. (Sie beträgt demnach 2m)

Der Graph von q ist achsensymmetrisch zum Graphen von f bezüglich der y-Achse. Also spiegelt man den Graphen an der Achse. Für den Term bedeutet das, dass man x durch –x ersetzt:

$q(x) = 2 - \ln(-x - 1)$

b) Lokale Änderungsrate: $f'(x_m)$ mit $f'(x) = -\frac{1}{x-1}$

mittlere Änderungsrate $\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_2} = \frac{f(8)-f(2)}{8-2} = \frac{[2-\ln(8-1)]-[2-\ln(2-1)]}{6} =$

$= \frac{[2-\ln(7)]-[2-\ln(1)]}{6} = \frac{2-\ln(7)-2}{6} = -\frac{\ln(7)}{6}$

Gleichsetzen: $-\frac{1}{x-1} = -\frac{\ln(7)}{6} \quad \Rightarrow \quad 6 = \ln(7)\cdot(x-1) \quad \Rightarrow \quad \frac{6}{\ln(7)} + 1 = x_m$

c) Man verbindet die beiden Punkte P(2|f(2)) und Q (8|f(8)) miteinander. Die Steigung der Strecke ist die mittlere Änderungsrate. Dann verschiebt man die Strecke parallel, dass sie den Graphen berührt. Diese Berührstelle ist dann x_m.

d) Für den Winkel α* zwischen x-Achse und der Tangente gilt:

$\tan\alpha^* = f'(2) \quad \Rightarrow \quad \tan\alpha^* = -\frac{1}{2-1} \quad \Rightarrow \quad \tan\alpha^* = -1 \quad \Rightarrow \quad \alpha^* = -45°$

Also gilt für α: α = 180° – 45° = 135° (s. Abb.2)

e) Für das Flächenstück im I. Quadranten gilt:

$$A_I = \int_2^6 f(x)dx = [3x-(x-1)\cdot\ln(x-1)]_2^6 = [3\cdot6-(6-1)\cdot\ln(6-1)]-[3\cdot2-(2-1)\cdot\ln(2-1)] =$$

$$= [18-5\cdot\ln(5)]-[6-\ln(1)] = 18-5\cdot\ln(5)-6 = 12-5\cdot\ln(5) \approx 3{,}95(m^2)$$

Damit steht eine Fläche von etwa 7,91 m² zur Verfügung.

3. a) Zur Grenzwertbestimmung bei Polynomen ist es von Vorteil, die höchste Potenz von x auszuklammern:

$$\lim_{x\to\pm\infty} g_k(x) = \lim_{x\to\pm\infty}\left[x^3\cdot\left(k+\underbrace{\frac{3\cdot(k+1)}{x}}_{\to0}+\underbrace{\frac{9}{x^2}}_{\to0}\right)\right] = \lim_{x\to\pm\infty}\left(k\cdot x^3\right) = \begin{cases}\pm\infty, & \text{falls } k>0\\ \mp\infty, & \text{falls } k<0\end{cases}$$

b) $g_k'(x) = 3kx^2 + 6\cdot(k+1)x + 9$

$g_k''(x) = 6kx + 6\cdot(k+1)$

$g_k''(x) = 0 \;\Rightarrow\; 6kx + 6\cdot(k+1) = 0 \;\Rightarrow\; kx = -k-1 \;\Rightarrow\; x = -\frac{1}{k} - 1$

VZW-Betrachtung ist hier nicht erforderlich, da der Text ja sagt, dass es genau einen Wendepunkt gibt.

c) Der Berechnete x-Wert muss also Null sein:

$$-\frac{1}{k}-1=0 \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{k}=-1 \quad \Rightarrow \quad k=-1$$

Es gilt also: $x = 0$ und $k = –1$. Setzt man beides in $g_k(x)$ ein, erhält man die y-Koordinate des Wendepunkts:

$g_{-1}(0) = -1\cdot 0^3 + 3\cdot(-1 + 1)\cdot 0^2 + 9\cdot 0 = 0$, damit gilt $W_{-1}(0|0)$.

Steigung der Wendetangente:

$g_{-1}'(0) = 3\cdot(-1)\cdot 0^2 + 6\cdot(-1 + 1)\cdot 0 + 9 = 9$

d) Da die eingezeichnete Wendetangente die Steigung 9 hat, muss sie durch den Punkt P(1|9) verlaufen. (Steigungsdreieck)

Damit ist die y-Achse in 3er-Schritten zu beschriften.