Teil A

1. a) Ebenengleichung. Skript §10 Punkt 3. Hier wird A als Aufhängepunkt gewählt.

$$\overrightarrow{AB}=\begin{pmatrix}0-1\\2-1\\2-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix}=\vec{u} \qquad \overrightarrow{AB}=\begin{pmatrix}-1-1\\2-1\\0-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2\\1\\-1\end{pmatrix}\Rightarrow \vec{v}=\begin{pmatrix}2\\-1\\1\end{pmatrix}$$

$$\vec{u}\times\vec{v}=\begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}2\\-1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1+1\\-[-1-2]\\1-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\3\\-1\end{pmatrix}=\vec{n}$$

$$\vec{n}\circ\left(\vec{X}-\vec{A}\right)=0$$

$$\begin{pmatrix}2\\3\\-1\end{pmatrix}\circ\left(\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\right)=0$$ Damit: E: $2x_1 + 3x_2 - x_3 - 4 = 0$

b) x_2-Achse: $\vec{X}=\lambda\cdot\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$ in E: $0 + 3\lambda - 0 - 4 = 0$ => $\lambda = 4/3$; Also: $\vec{S}=\begin{pmatrix}0\\\frac{4}{3}\\0\end{pmatrix}$ und $S\left(0\middle|\frac{4}{3}\middle|0\right)$

2. a) Die Gerade h hat damit die Gleichung:

$$h:\vec{X}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}+\mu\cdot\begin{pmatrix}3\\-6\\6\end{pmatrix}$$ oder kurz $h:\vec{X}=\mu\cdot\begin{pmatrix}1\\-2\\2\end{pmatrix}$; $\mu\in$ IR.

Wenn sie sich in F schneiden, muss F auf beiden Geraden liegen. Dies kann man prüfen oder eine Standard-Schnittpunktbestimmung (Skript §09) durchführen.

▶ F auf g?: $\begin{pmatrix}2\\-4\\4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\-4\\5\end{pmatrix}+\lambda\cdot\begin{pmatrix}-2\\0\\1\end{pmatrix}\begin{matrix}\Rightarrow\quad\lambda=-1\\\Rightarrow -4=-4 (w)\\\Rightarrow\quad\lambda=-1\end{matrix}$ Also: $F\in g$

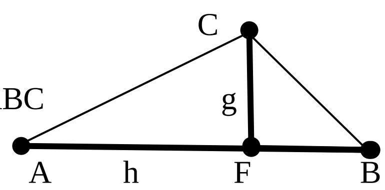
▶ F auf h?: $\begin{pmatrix}2\\-4\\4\end{pmatrix}=\mu\cdot\begin{pmatrix}1\\-2\\2\end{pmatrix}\begin{matrix}\Rightarrow\mu=2\\\Rightarrow\mu=2\\\Rightarrow\mu=2\end{matrix}$ Also: $F\in h$

Damit ist F Schnittpunkt der beiden Geraden.
Rechter Winkel über Skalarprodukt der beiden RV Skript §05:

$$\begin{pmatrix}1\\-2\\2\end{pmatrix}\circ\begin{pmatrix}-2\\0\\1\end{pmatrix}=-2+0+2=0\ \Rightarrow\varphi=90°$$

b) Eine Skizze ist hilfreich:

[CF] ist also die Höhe im Dreieck ABC



Teil B

a) Die Eckpunkte der oberen Kante sind A und B, ihr Mittelpunkt M_1 errechnet sich so:

$$\overrightarrow{M_1} = \frac{\vec{A}+\vec{B}}{2} = \frac{\begin{pmatrix}3\\0\\2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\3\\2\end{pmatrix}}{2} = \frac{\begin{pmatrix}3\\3\\4\end{pmatrix}}{2} = \begin{pmatrix}1{,}5\\1{,}5\\2\end{pmatrix} \qquad M_1(1{,}5|1{,}5|2)$$

Die Eckpunkte der unteren Kante sind E und F, ihr Mittelpunkt M_2 errechnet sich so:

$$\overrightarrow{M_2} = \frac{\vec{E}+\vec{F}}{2} = \frac{\begin{pmatrix}6\\0\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\6\\0\end{pmatrix}}{2} = \frac{\begin{pmatrix}6\\6\\0\end{pmatrix}}{2} = \begin{pmatrix}3\\3\\0\end{pmatrix} \qquad M_2(3|3|0)$$

Länge der Verbindungsstrecke: $\left|\overrightarrow{M_1M_2}\right| = \left|\begin{pmatrix}3-1{,}5\\3-1{,}5\\0-2\end{pmatrix}\right| = \left|\begin{pmatrix}1{,}5\\1{,}5\\-2\end{pmatrix}\right| = \sqrt{2{,}25+2{,}25+4} = \sqrt{8{,}5}$

Länge des Seils (20% länger – Faktor 1,2): $1{,}2\cdot\sqrt{8{,}5} \approx 3{,}5$

b) Ebenengleichung. Skript §10 Punkt 3. Hier wird A als Aufhängepunkt gewählt.

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix}0-3\\3-0\\2-2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-3\\3\\0\end{pmatrix} \Rightarrow \vec{u} = \begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix} \qquad \overrightarrow{AE} = \begin{pmatrix}6-3\\0-0\\0-2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3\\0\\-2\end{pmatrix} = \vec{v}$$

$$\vec{u}\times\vec{v} = \begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}3\\0\\-2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-2-0\\-[2-0]\\0-3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-2\\-2\\-3\end{pmatrix} \Rightarrow \vec{n} = \begin{pmatrix}2\\2\\3\end{pmatrix}$$

$$\vec{n}\circ\left(\vec{X}-\vec{A}\right) = 0$$

$$\begin{pmatrix}2\\2\\3\end{pmatrix}\circ\left(\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}3\\0\\2\end{pmatrix}\right) = 0$$

Damit: $L: 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 - 12 = 0$

c) Ein Trapez ist ein Viereck, in dem zwei Seiten parallel sind (hier sind offensichtlich [AB] und [EF] parallel). Man zeigt also, dass die Vektoren $\overrightarrow{AB}$ und $\overrightarrow{EF}$ linear abhängig sind.

$$\overrightarrow{AB} = \lambda\cdot\overrightarrow{EF}$$

$$\begin{pmatrix}0-3\\3-0\\2-2\end{pmatrix} = \lambda\cdot\begin{pmatrix}0-6\\6-0\\0-0\end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix}-3\\3\\0\end{pmatrix} = \lambda\cdot\begin{pmatrix}-6\\6\\0\end{pmatrix} \begin{matrix}\Rightarrow \lambda = 0{,}5\\ \Rightarrow \lambda = 0{,}5\\ \Rightarrow 0 = 0 (w)\end{matrix}$$

Außerdem wäre zu zeigen, dass die 4 Punkte nicht auf einer Geraden liegen. Da aber die Punkte ABE eine Ebene aufspannen (vgl. b)) liegen diese 3 Punkte nicht auf derselben Geraden.

Damit ist die Kletterwand ein Trapez.

d) Der Winkel zwischen 2 Ebenen (Skript §12) errechnet sich aus den Normalenvektoren der beiden Ebenen, also aus

$\vec{n} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ (die Kletterwand liegt in Ebene L) und dem (Normalenvektor der x_{12}-Ebene $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$:

$$\cos\alpha = \frac{\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}{\sqrt{4+4+9} \cdot 1} = \frac{3}{\sqrt{17}} \Rightarrow \alpha \approx 43{,}3°$$

e) Nicht nötig für e) ist die Überlegung: Die Punkte A, B haben dieselbe x_3-Koordinate 2. Damit liegen sie also 2 m über dem Untergrund und der eine Eckpunkt auf Pfahl 1 (x_3-Achse) hat die Koordinaten (0|0|2), der obere ist 1,8 m darüber und hat die Koordinaten (0|0|3,8).

Das Viereck ist nach den Angaben ein Parallelogramm mit der Grundseitenlänge 1,8 m und einer Höhe, die so groß wie der Abstand der Pfähle (bzw. der Punkte P_1 und P_2) ist.

$$h = \left|\overrightarrow{P_2P_1}\right| = \left|\begin{pmatrix} 5-0 \\ 10-0 \\ 0-0 \end{pmatrix}\right| = \left|\begin{pmatrix} 5 \\ 10 \\ 0 \end{pmatrix}\right| = \sqrt{25+100} = \sqrt{125} \text{ Damit: } A = g \cdot h = 1{,}8 \cdot \sqrt{125} \approx 20{,}12 \text{ m}^2$$

f) Gesucht ist also zunächst die Höhe h des Eckpunktes über dem Boden. Für den gesuchten Abstand muss nur noch die Plattformhöhe 3 von h subtrahiert werden.
Man schneidet Gerade RT mit g und berechnet damit h.

$$\overrightarrow{RT} = \begin{pmatrix} 2-5 \\ 10-7 \\ 3-3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{u} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \text{Gerade RT: } \vec{X} = \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \\ 3 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 10 \\ h-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \\ 3 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\lambda \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 10 \\ h-2 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \Rightarrow & 5\lambda & +\mu = 5 \\ \Rightarrow & 10\lambda & -\mu = 7 \\ \Rightarrow & \lambda(h-2) & = 1 \end{matrix}$$

Addition der beiden oberen Gleichungen ergibt $15\lambda = 12 \Rightarrow \lambda = \frac{4}{5}$

Einsetzen in die 3. Gleichung: $\frac{4}{5}(h-2) = 1 \Rightarrow h-2 = \frac{5}{4} \Rightarrow h = 3{,}25$

Damit beträgt der gesuchte Abstand 0,25m.