Teil A

1. Kugel/Kreis Skript §07

a) Abstand zweier Punkte Skript §05 Skript §11

Der Abstand der beiden Punkte M und P muss so groß wie der Radius 6 sein.

$\left|\overrightarrow{MP}\right| = 6$

$\left|\begin{pmatrix} 5-1 \\ 1-4 \\ p-0 \end{pmatrix}\right| = 6 \quad \Rightarrow \quad \left|\begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ p \end{pmatrix}\right| = 6 \;|^2 \qquad 16 + 9 + p^2 = 36 \quad \Rightarrow \quad p^2 = 11$

$p_{1|2} = \pm\sqrt{11}$

b) Der Richtungsvektor von g und der „Radiusvektor“, also der Verbindungsvektor von B und M stehen aufeinander senkrecht. (Ermitteln z.B. durch Vertauschen zweier Koordinaten, Multiplizieren der einen mit –1 und Nullsetzen der dritten Koordinate)

$\overrightarrow{MB} = \begin{pmatrix} -3-1 \\ 8-4 \\ 2-0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{u} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$ auch andere RV mögl. mit der Bedingung $\overrightarrow{MB} \circ \vec{u} = 0$

$g: \vec{X} = \begin{pmatrix} 3 \\ 8 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$

2. Schnittpunktbestimmung. Skript §11 Punkt 8. Ebenengleichung. Skript §10 Punkt 3.

x_1x_2-Ebene: $x_3 = 0$

Einsetzen der Gerade (nur x_3-Koordinate, also 3. Zeile): $4 + \lambda = 0 \Rightarrow \lambda = -4$

Zur Ermittlung des Punkts P muss λ in die Geradengleichung eingesetzt werden:

$\vec{P} = \begin{pmatrix} 2 \\ a-4 \\ 4 \end{pmatrix} - 4 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ a-4 \\ 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -8 \\ 8 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ a+4 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad P(-6 \mid a+4 \mid 0)$

b) Schnittpunkt zweier Geraden Skript §09

x_3-Achse: $\vec{X} = \mu \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 2 \\ a-4 \\ 4 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \mu \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \Rightarrow 2 + 2\lambda = 0 \qquad \Rightarrow \lambda = -1 \\ \Rightarrow a - 4 - 2\lambda = 0 \Rightarrow a - 4 + 2 = 0 \Rightarrow a = 2 \\ \Rightarrow 4 + \lambda = \mu \qquad \Rightarrow 3 = \mu \end{array}$$

Einsetzen von a und λ in g_a oder von μ in x_3-Achse: S(0|0|3)

Teil B

a) Ebenengleichung. Skript §10 Punkt 3. Hier wird S_1 als Aufhängepunkt gewählt.

$$\overrightarrow{S_1S_2} = \begin{pmatrix} 0-0 \\ 0-6 \\ 3-2,5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -6 \\ 0,5 \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{u} = \begin{pmatrix} 0 \\ -12 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \overrightarrow{S_1S_3} = \begin{pmatrix} 0-6 \\ 0-0 \\ 3-2,5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ 0 \\ 0,5 \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{v} = \begin{pmatrix} -12 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ -12 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -12 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -12-0 \\ -[0-(-12)] \\ 0-(-12)\cdot(-12) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -12 \\ -12 \\ -144 \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 12 \end{pmatrix}$$

$$\vec{n} \circ \left(\vec{X} - \vec{S_1}\right) = 0$$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 12 \end{pmatrix} \circ \left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ 2,5 \end{pmatrix} \right) = 0$$

Damit: E: $x_1 + x_2 + 12x_3 - 36 = 0$

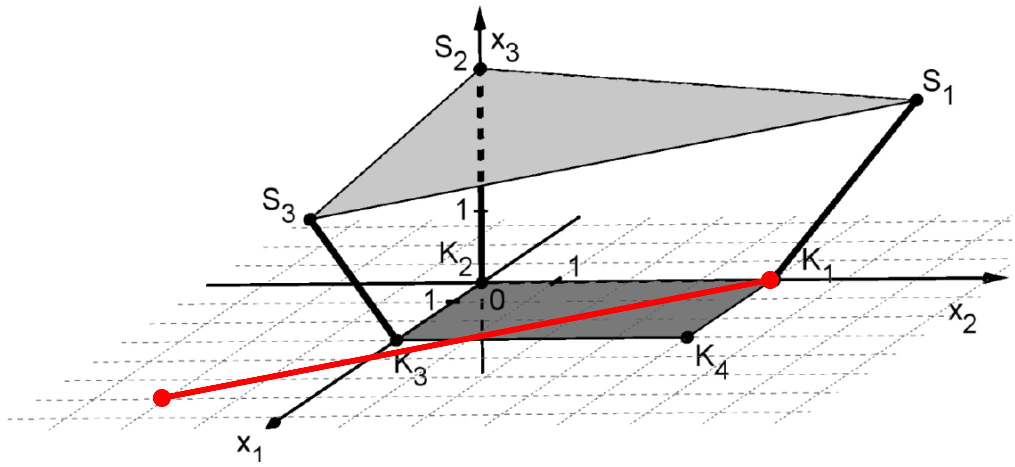
b) Den Inhalt A der Dreiecksfläche erhält man über das Vektorprodukt:

$$A = \frac{1}{2} \cdot \left| \overrightarrow{S_1S_2} \times \overrightarrow{S_1S_3} \right| = \frac{1}{2} \cdot \left| \begin{pmatrix} 0 \\ -6 \\ 0,5 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -6 \\ 0 \\ 0,5 \end{pmatrix} \right| = \frac{1}{2} \cdot \left| \begin{pmatrix} -3-0 \\ -[0+3] \\ 0-36 \end{pmatrix} \right| = \frac{1}{2} \cdot \left| \begin{pmatrix} -3 \\ -3 \\ -36 \end{pmatrix} \right| == \frac{1}{2} \cdot \sqrt{9+9+1296} \approx 18,1 < 20$$

Damit ist eine zusätzliche Sicherung nicht nötig.

c) Der Richtungsvektor $\overrightarrow{S_1K_1}$ liegt in der x_2x_3-Ebene. Da auch S_2 in dieser Ebene liegt (die x_1-Koordinaten der 3 Punkte sind 0), liegt der Schatten auf dem Boden somit auf der Schnittgeraden der Bodenebene, der x_1x_2-Ebene, und der x_2x_3-Ebene, also auf der x_2-Achse.

d)



Der Schatten wird durch die rot eingezeichnete Strecke und die x_2-Achse begrenzt. Damit liegt die Ecke K_3 völlig im Schatten und so wird mehr als die Hälfte des Sandkastens beschattet.

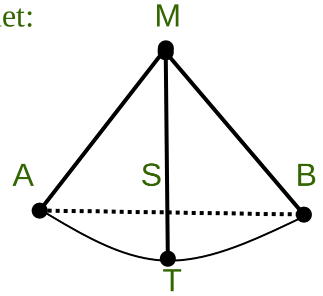
e) Der Neigungswinkel, also der Schnittwinkel zwischen zwei Ebenen (Skript §12) errechnet sich aus den Normalenvektoren der beiden Ebenen, also aus

$\vec{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 12 \end{pmatrix}$ und dem (Richtungsvektor der x_3-Achse) Vektor $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, der auf den Boden senkrecht steht.

$$\cos\alpha = \frac{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 12 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}{\sqrt{1+1+144} \cdot 1} = \frac{12}{\sqrt{146}} \approx 0,993 \Rightarrow \alpha \approx 6,72° < 8°$$

f) Der Radius r der Kugel ist größer als der (fast) angegebene Radius des Kugelsegments (50cm:2 = 25 cm)

Schneidet man die Kugel auf, so erhält man folgende Figur, wobei T den tiefsten Punkt der Wassertasche bezeichnet:



Die durchgezogenen Linien sind der Kugelradius, die gestrichelte Linie der Durchmesser des Segments. Die Strecke [ST] hat die Länge h und somit die Strecke [MS] die Länge r – h.

Im Dreieck MSB gilt der Satz des Pythagoras, da es bei S rechtwinklig ist:

$$\overline{MB}^2 = \overline{MS}^2 + \overline{SB}^2$$

Es gilt dabei: $\overline{MB} = r$ $\quad \overline{MS} = r - h = r - 5(\text{cm})$ $\quad$ und $\quad \overline{SB} = 25(\text{cm})$

$$r^2 = (r-5)^2 + 25^2$$

$r^2 = r^2 - 2 \cdot 5 \cdot r + 25 + 25^2$

$0 = -10r + 650 \quad \Rightarrow r = 65$ (cm)

Damit: $V = \frac{1}{3}\pi h^2 (3r - h) = \frac{1}{3}\pi \cdot 5^2 (3 \cdot 65 - 5) = \frac{1}{3}\pi \cdot 4750 \approx 4974,2$

Da alle Angeben in cm sind, aber nach Litern (dm^3) gefragt ist, muss das Volumen noch umgerechnet werden (1 dm^3 = 1000 cm^3)

$V \approx 4,974$ Liter