Teil A

1. **Definitionsmenge** BWL Skript Kurvendiskussion 1.

   W: $3x - 5 \geq 0 \quad \Rightarrow \quad 3x \geq 5 \quad \Rightarrow \quad x \geq \frac{5}{3} \quad \Rightarrow \quad D = \left[\frac{5}{3};\ +\infty\right[$

   Tangentengleichung Skript Kurvendiskussion 5.

   $f'(x) = \frac{3}{2\sqrt{3 \cdot x - 5}}$

   $x_o = 3$

   $f(x_o) = \sqrt{3 \cdot 3 - 5} = \sqrt{9 - 5} = \sqrt{4} = 2$

   $f'(x_0) = \frac{3}{2\sqrt{3 \cdot 3 - 5}} = \frac{3}{2\sqrt{4}} = \frac{3}{2 \cdot 2} = \frac{3}{4} = 0{,}75$

   Über Geradengleichung
   $y = mx + t$
   $2 = 0{,}75 \cdot 3 + t$
   $2 = 2{,}25 + t$
   $t = -0{,}25$

   oder über Formel
   $y = 0{,}75(x - 3) + 2$
   $y = 0{,}75x - 2{,}25 + 2$
   $y = 0{,}75x - 0{,}25$

   Tangente: $y = 0{,}75x - 0{,}25$

2. $f(x) = -x^3 + 9x^2 - 15x - 25$

   $f'(x) = -3x^2 + 18x - 15 = -3(x^2 - 6x + 5) = -3(x - 5)(x - 1)$ (zur Übung Vieta!)

   (1) $f'(0) = -15$.

   (2) Zu zeigen: A liegt auf der x-Achse und die Tangentensteigung ist 0, also $f'(5) = 0$
   - $f(5) = -5^3 + 9 \cdot 5^2 - 15 \cdot 5 - 25 = -125 + 225 - 75 - 25 = 0$
   - $f'(5) = -3 \cdot 5^2 + 18 \cdot 5 - 15 = -75 + 90 - 15 = 0$

   (3)
   - Entweder über Tangentengleichung Skript Kurvendiskussion 5.

     $x_o = -1$
     $f(x_o) = -(-1)^3 + 9 \cdot (-1)^2 - 15 \cdot (-1) - 25 = 1 + 9 + 15 - 25 = 0$
     $f'(x_o) = -3 \cdot (-1)^2 + 18 \cdot (-1) - 15 = -3 - 18 - 15 = -36$

     Über Geradengleichung
     $y = mx + t$
     $0 = -36 \cdot (-1) + t$
     $t = -36$

     oder über Formel
     $y = -36(x - (-1)) + 0$
     $y = -36x - 36$

     $y = -36x - 36$

   - Oder: Zu zeigen, dass für $x = -1$ die y-Werte der Tangente und Funktion übereinstimmen und, dass $f'(-1) = m_{Tangente}$, also $f'(-1) = -36$

     y–Wert Tangente: $y = -36 \cdot (-1) - 36 = 36 - 36 = 0$
     y-Wert Funktion: $y = -(-1)^3 + 9 \cdot (-1)^2 - 15 \cdot (-1) - 25 = 1 + 9 + 15 - 25 = 0$
     Beide Werte stimmen überein

     $f'(-1) = -3 \cdot (-1)^2 + 18 \cdot (-1) - 15 = -3 - 18 - 15 = -36 = m_{Tangente}$
     Damit ist die Behauptung gezeigt.

3. Jede Integralfunktion hat die untere Integrationsgrenze als Nullstelle. Damit ist eine Nullstelle hier x = 3.

   Die durch den Graphen und die x-Achse im Bereich x = 3 bis zu der rechts davon liegenden Nullstelle eingeschlossene Fläche A_1 liegt oberhalb der x-Achse. Es gibt eine Stelle rechts von dieser Nullstelle, für die das unter der x-Achse liegende Flächenstück denselben Inhalt hat wie A_1. Da die Flächenbilanz Null ist, ist dort eine Nullstelle der Integralfunktion.

   Wegen der Monotonie der Parabel liegen bei der Integration weiter in positive x-Richtung befindliche Flächenstücke stets unterhalb der x-Achse, es gibt also rechts keine weiteren Nullstellen.

   Wegen der Symmetrie der Parabel gibt es dieselbe Situation auch links von der linken Nullstelle.

   Insgesamt gibt es als 3 Nullstellen.

4. $f_a(x) = \frac{1}{a}x^3 - x$ mit $x \in IR$

   a) Da a positiv ist, gilt für den Grenzwert $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$, also ist Abb.2 der zugehörige Graph

   b) Extrempunkte: Skript Kurvendiskussion 6. und Kurvenscharen Skript §16
   Es müssen 2 Bedingungen erfüllt sein:
   ① Der Wert der Ableitung an der Stelle x = 3 muss Null sein: **$f_a'(3) = 0$**
   ② Die Ableitung muss einen VZW an der Stelle x = 3 besitzen oder der Wert der 2. Ableitung an der Stelle x = 3 muss ungleich Null sein: **$f_a''(3) \neq 0$;** vergleiche auch Skript Kurvendiskussion 10.

   $f_a'(x) = \frac{1}{a}\cdot 3x^2 - 1$ $\qquad$ $f_a''(x) = \frac{1}{a}\cdot 6x$

   Bedingung ①: $f_a'(3) = 0$ $\quad$ => $\frac{1}{a}\cdot 3\cdot 3^2 - 1 = 0$ => $\frac{1}{a}\cdot 27 = 1$ => a = 27

   Bedingung ② mit a = 27: $f_{27}''(3) = \frac{1}{27}\cdot 6\cdot 3 = \frac{18}{27} \neq 0$

Teil B

1. a) Mit den Nullstellen kann der Term als Produkt der entsprechenden 3 Faktoren geschrieben werden Da es sich um eine Funktion 3. Grades handelt, besteht der Term nur aus drei Faktoren mit der Variablen x.

$f(x) = a\cdot(x-0)(x-5)\cdot(x-10) = ax\cdot(x-5)\cdot(x-10) = ax\cdot(x^2-15x+50)$ (Vieta "rückwärts")

$f(x) = a\cdot(x^3-15x^2+50x)$

Punkt (1|2) einsetzen:

$2 = a\cdot(1^3-15\cdot1^2+50\cdot1)$

$2 = a\cdot36 \Rightarrow a = \frac{1}{18}$ Also: $f(x) = \frac{1}{18}\cdot(x^3-15x^2+50x)$

b) **Ableitungen**

$$f'(x) = \frac{1}{18}\cdot(3x^2-30x+50)$$

$$f''(x) = \frac{1}{18}\cdot(6x-30)$$

$$f'''(x) = \frac{1}{18}\cdot6 = \frac{1}{3}$$

Wendepunkt Skript Kurvendiskussion 8.

$f''(x) = 0 \Rightarrow f''(x) = \frac{1}{18}\cdot(6x-30) \Rightarrow 6x-30=0 \Rightarrow x=5$

$f(5) = f(5) = \frac{1}{18}\cdot(5^3-15\cdot5^2+50\cdot5) = 0$ und $f'''(5) = \frac{1}{3} \neq 0$

Damit ist W(5|0) Wendepunkt.

Tangentengleichung Skript Kurvendiskussion 5.

$x_o = 5$

$f(x_o) = 0$

$f'(x) = \frac{1}{18}\cdot(3\cdot5^2-30\cdot5+50) = -\frac{25}{18}$

Über Geradengleichung	oder über Formel
$y = mx + t$	$y = -\frac{25}{18}(x-5)+0$
$0 = -\frac{25}{18}\cdot5 + t$	$y = -\frac{25}{18}x + \frac{125}{18}$
$0 = -\frac{125}{18} + t$	$y = -\frac{25}{18}x + 6\frac{17}{18}$
$t = \frac{125}{18} = 6\frac{17}{18}$	

Tangente: $y = -\frac{25}{18}x + 6\frac{17}{18}$

c) **Verschiebung**

Um die Aufgabe zu lösen, gibt es eine Reihe von Möglichkeiten.

- Die rein analytische Methode, eine Verschiebung um a in x-Richtung im Term von g „einzusetzen“ ist die schwierigste und nicht empfehlenswert:

  $g(x-a) = \frac{1}{18}\cdot\left((x-a)^3 - 25(x-a)\right)$

  Hier müssten die Klammern ausmultipliziert werden, der Term dann koeffizientenweise mit f(x) verglichen werden, woraus a bestimmt werden kann. Einziger Vorteil dieser Methode ist es, dass man damit zeigt, dass der Graph von f tatsächlich durch Verschiebung aus dem von g hervorgeht.

Einfacher ist es jedoch, da hier vorgegeben ist, dass die Graphen durch Verschiebung auseinander hervorgehen, nur einen Punkt zu vergleichen:

- **Variante 1** *Nullstellenvergleich*

  $g(x) = \frac{1}{18}\cdot\left(x^3 - 25x\right) = \frac{1}{18}\cdot x\cdot\left(x^2 - 25\right) = \frac{1}{18}\cdot x\cdot(x-5)\cdot(x+5)$

  g hat also die Nullstellen –5; 0; und 5. Da f die Nullstellen 0; 5 und 10 hat, sieht man, dass der Graph um 5 in positive x-Richtung verschoben wird.

- **Variante 2** *Wendepunktvergleich*

  $g'(x) = \frac{1}{18}\cdot\left(3x^2 - 25\right)$

  $g''(x) = \frac{1}{18}\cdot 6x$ $\quad g''(x) = 0 \Rightarrow x = 0;\quad y = 0;\quad g'''(0) \neq 0 \Rightarrow$ Wendepunkt W(0|0)

  $g'''(x) = \frac{1}{3}$

  Der Wendepunkt wird also wie der Graph um 5 Einheiten in positive x-Richtung verschoben.

Symmetrie

Die angegebene Symmetrie bedeutet für den Graphen von g, dass er auch zu seinem Wendepunkt, dem Ursprung (s.o), symmetrisch sein muss Skript Kurvendiskussion 3.

$g(-x) = g(-x) = \frac{1}{18}\cdot\left((-x^3) - 25(-x)\right) = \frac{1}{18}\cdot\left(-x^3 + 25x\right) = -\frac{1}{18}\cdot\left(x^3 - 25x\right) = -g(x)$

Damit sind beide Graphen zu ihrem Wendepunkt symmetrisch.

d) Die erste Nullstelle ist die untere Integrationsgrenze x = 1

Die Flächenbilanz ist auf Grund der Symmetrie zum Wendepunkt gleich Null, wenn von 1 bis 9 integriert wird. Also ist die 2. Nullstelle x = 9

e) Da x = 10 Nullstelle ist, werden bei der Integration für x > 10 immer Flächenstücke über der x-Achse addiert. Da der Funktionsgraph steigt, existiert eine Zahl größer 10 als obere Integrationsgrenze, für die der Inhalt der zwischen 10 und dieser Zahl integrierten Fläche so groß wie der der Inhalt der im Bereich $x \in [9;10]$ unter der x-Achse liegenden Fläche zwischen x-Achse und Graphen ist. So ist hier die Flächenbilanz gleich Null. Weiter rechts gibt es keine weitere Nullstelle, da der Funktionsgraph stets oberhalb der x-Achse ist.

f) Aus Symmetriegründen ist auch links von x = 0 eine weitere Nullstelle zu finden, aber sonst keine mehr (s. Teilaufgabe e)), damit sind insgesamt 4 Nullstellen vorhanden.

g) h muss eine Sinus-Funktion sein, da x = 0 Nullstelle ist. Ihre Periode beträgt 10.

$$h(x) = a \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{10} \cdot x\right) = a \cdot \sin\left(\frac{\pi}{5} \cdot x\right)$$

Flächeninhalt zwischen Graph und der x-Achse (also zwischen den Nullstellen x = 0 und x = 5), um a zu bestimmen:

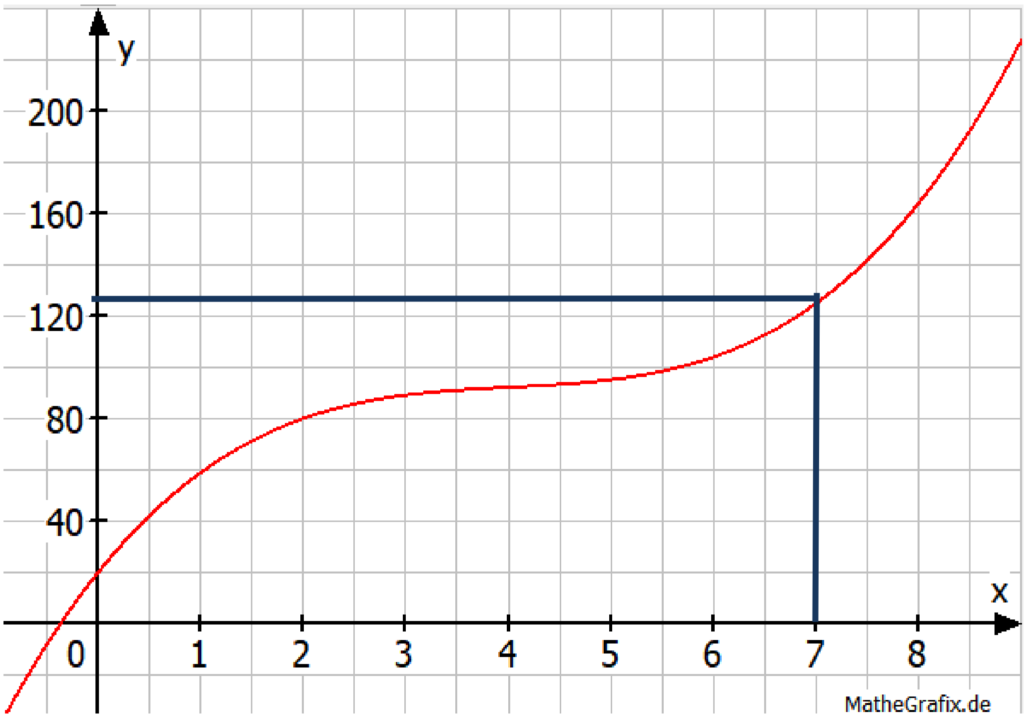
$$\int_0^5 h(x)dx = \int_0^5 a \cdot \sin\left(\frac{\pi}{5} \cdot x\right) dx = \left[a \cdot \frac{5}{\pi} \cos\left(\frac{\pi}{5} \cdot x\right)\right]_0^5 =$$

$$= -a \cdot \frac{5}{\pi} \cos\left(\frac{\pi}{5} \cdot 5\right) + a \cdot \frac{5}{\pi} \cos\left(\frac{\pi}{5} \cdot 0\right) = -a \cdot \frac{5}{\pi} \cos(\pi) + a \cdot \frac{5}{\pi} \cos(0) = \frac{5}{\pi} \cdot a + \frac{5}{\pi} \cdot a = \frac{10}{\pi} a$$

Damit: $\frac{10}{\pi} a = \frac{625}{72} \Rightarrow a = \frac{125}{144} \pi$

$$h(x) = \frac{125}{144} \cdot \pi \cdot \sin\left(\frac{\pi}{5} \cdot x\right)$$

2.



K.

a) α) gesucht ist x für f(x) = 125 Man liest ab: $x \approx 7$, also eine Produktionsmenge von ca. 7 m³

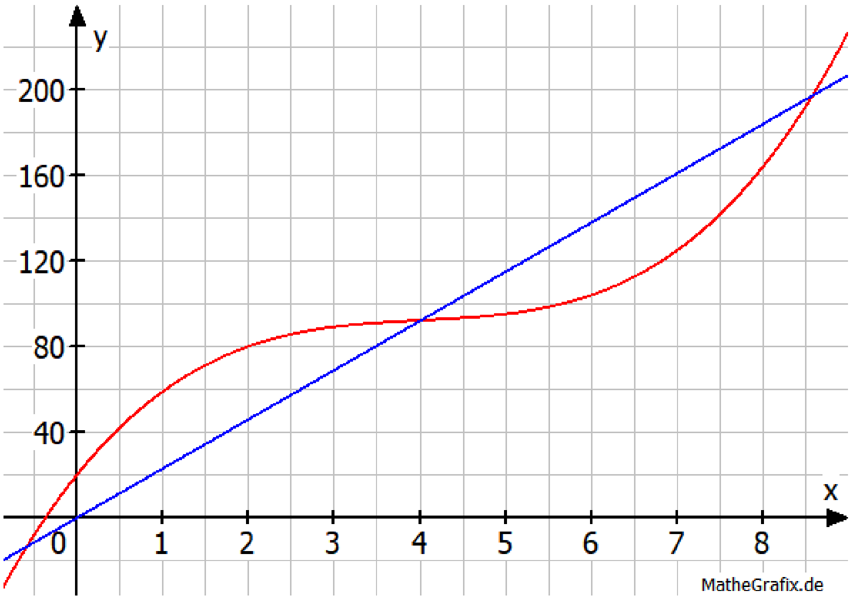
β) Man soll das Monotonieverhalten nur angeben, also reicht es, dies aus dem Verlauf des Graphen zu ermitteln:

Die Funktion ist streng monoton zunehmend, das heißt, die Kosten nehmen zu, wenn die Produktionsmenge größer wird.

b) $G(4) = E(4) - K(4) = 23\cdot 4 - (4^3 - 12\cdot 4^2 + 50\cdot 4 + 20) = 0$

Es wird kein Gewinn erzielt, da der Wert nicht größer als Null ist.

c)



Im Bereich, in dem der blaue Graph der Funktion E über dem der Funktion K liegt, also zwischen etwa 4 m³ und 8,6m³ Flüssigkeit.

d) Dazu muss man den Hochpunkt der Funktion G bestimmen.

$G(x) = E(x) – K(x) = 23 \cdot x – (x^3 – 12 \cdot x^2 + 50 \cdot x + 20) =$

$= –x^3 + 12x^2 – 27x – 20$

$G'(x) = – 3x^2 + 24x – 27$

$G'(x) = 0$

$– 3x^2 + 24x – 27 = 0 \quad |:(–3)$

$x^2 – 8x + 9 = 0$

$$x_{1|2} = \frac{8 \pm \sqrt{64 - 4 \cdot 1 \cdot 9}}{2} = \frac{8 \pm \sqrt{64 - 36}}{2} = \frac{8 \pm \sqrt{28}}{2}$$

$x_1 \approx 6{,}6 \qquad x_2 \approx 1{,}35$

nur x_1 liegt im ermittelten Bereich aus c)

Also liegt das Maximum bei etwa 6,5 m³ vor.