Teil A

1. **Definitionsmenge** BWL Skript Kurvendiskussion 1.

f_1: B: $x^2 - 4 = 0$ => $x^2 = 4$ => $x_{1|2} = \pm 2$ $D = \mathbb{R}\setminus\{-2; 2\}$

f_2: L: $x + 2 > 0$ => $x > -2$ $D = \,]-2; +\infty[$

Nullstellen Skript Kurvendiskussion 2.

f_1: $2x + 3 = 0$ => $2x = -3$ => $x = -1{,}5$

f_2: $\ln(x + 2) = 0 \,|e^{\cdots}$ => $x + 2 = 1$ => $x = -1$

2. Der gesuchte Punkt ist ein Terrassenpunkt. Die Funktion g mit $g(x) = x^3$ hat einen Terrassenpunkt im Ursprung. Verschiebt man den Graphen entsprechend um 2 nach rechts [$x \rightarrow (x - 2)$] und um 1 nach oben, dann erhält man die einfachste der gesuchten Funktionen:

$f(x) = (x-2)^3 + 1$

3. $f(x) = -x^3 + 9x^2 - 15x - 25$

$f'(x) = -3x^2 + 18x - 15 = -3(x^2 - 6x + 5) = -3(x - 5)(x - 1)$ (zur Übung Vieta!)

(1) $f'(0) = -15$.

(2) Zu zeigen: A liegt auf der x-Achse und die Tangentensteigung ist 0, also $f'(5) = 0$

- $f(5) = -5^3 + 9\cdot 5^2 - 15\cdot 5 - 25 = -125 + 225 - 75 - 25 = 0$
- $f'(5) = -3\cdot 5^2 + 18\cdot 5 - 15 = -75 + 90 - 15 = 0$

(3) • Entweder über Tangentengleichung Skript Kurvendiskussion 5.

$x_o = -1$

$f(x_o) = -(-1)^3 + 9\cdot(-1)^2 - 15\cdot(-1) - 25 = 1 + 9 + 15 - 25 = 0$

$f'(x_o) = -3\cdot(-1)^2 + 18\cdot(-1) - 15 = -3 - 18 - 15 = -36$

Über Geradengleichung	oder über Formel
$y = mx + t$	$y = -36(x - (-1)) + 0$
$0 = -36\cdot(-1) + t$	$y = -36x - 36$
$t = -36$	

$y = -36x - 36$

• Oder: Zu zeigen, dass für $x = -1$ die y-Werte der Tangente und Funktion übereinstimmen und, dass $f'(-1) = m_{\text{Tangente}}$, also $f'(-1) = -36$

y–Wert Tangente: $y = -36\cdot(-1) - 36 = 36 - 36 = 0$

y-Wert Funktion: $y = -(-1)^3 + 9\cdot(-1)^2 - 15\cdot(-1) - 25 = 1 + 9 + 15 - 25 = 0$

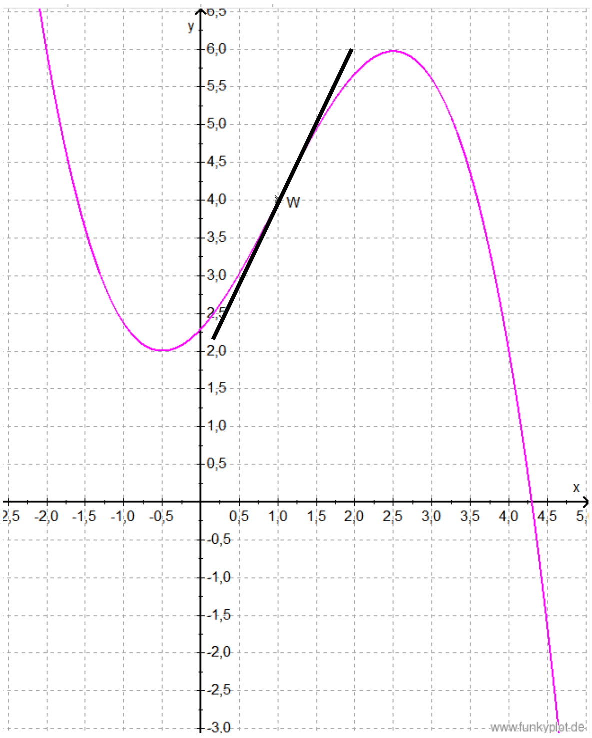
Beide Werte stimmen überein

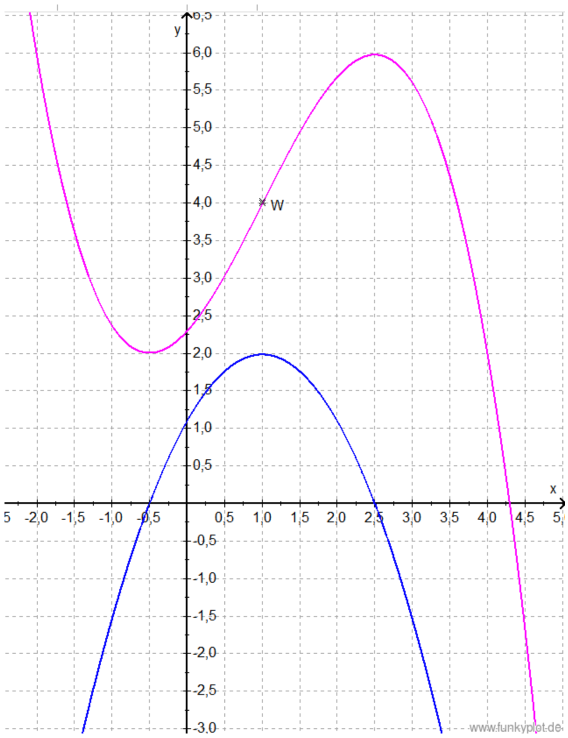
$f'(-1) = -3\cdot(-1)^2 + 18\cdot(-1) - 15 = -3 - 18 - 15 = -36 = m_{\text{Tangente}}$

Damit ist die Behauptung gezeigt.

4. • Zeichnet man die Tangente im Punkt mit der x-Koordinate 1 ein, so erkennt man, dass diese etwa die Steigung 2 hat, also ist auch $f'(1) \approx 2$

• Die Nullstellen der Ableitung sind die Extremstellen der Funktion also $x \approx -0{,}5$ bzw. $x \approx 2{,}5$. Graph: S. rechte Abb. in blau





5. $f_a(x) = \frac{1}{a}x^3 - x$ mit $x \in \mathbb{R}$

a)Da a positiv ist, gilt für den Grenzwert $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$, also ist Abb.2 der zugehörige Graph

b) Extrempunkte: Skript Kurvendiskussion 6. und Kurvenscharen Skript §16

Es müssen 2 Bedingungen erfüllt sein:

① Der Wert der Ableitung an der Stelle x = 3 muss Null sein: $\mathbf{f_a'(3) = 0}$

② Die Ableitung muss einen VZW an der Stelle x = 3 besitzen oder der Wert der 2. Ableitung an der Stelle x = 3 muss ungleich Null sein: $\mathbf{f_a''(3) \neq 0}$; vergleiche auch Skript Kurvendiskussion 10.

$f_a'(x) = \frac{1}{a} \cdot 3x^2 - 1$ $\qquad$ $f_a''(x) = \frac{1}{a} \cdot 6x$

Bedingung ①: $f_a'(3) = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{a} \cdot 3 \cdot 3^2 - 1 = 0 \Rightarrow \frac{1}{a} \cdot 27 = 1 \quad \Rightarrow \quad a = 27$

Bedingung ② mit a = 27: $f_{27}''(3) = \frac{1}{27} \cdot 6 \cdot 3 = \frac{18}{27} \neq 0$

Teil B

1. $f(x) = 2\cdot[(\ln x)^2 - 1]$

a) • **Nullstellen** Skript Kurvendiskussion 2.

$2\cdot[(\ln x)^2 - 1] = 0 |:2 \quad \Rightarrow \quad (\ln x)^2 - 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad (\ln x)^2 = 1 \quad \Rightarrow \quad \ln x = \pm 1$

Damit: $x_1 = e^{-1}$; $x_2 = e$

• **Tiefpunkt** Skript Kurvendiskussion 6.

$f(x) = 2\cdot[(\ln x)^2 - 1] = 2\cdot(\ln x)^2 - 2$

$f'(x) = 2\cdot 2(\ln x)\cdot\frac{1}{x} = \frac{4\ln x}{x}$ Kettenregel Skript §11

$f'(x) = 0 \Rightarrow 4\ln x = 0 \quad \Rightarrow \ln x = 0 \quad \Rightarrow x = 1$

$f(1) = 2\cdot[(\ln 1)^2 - 1] = 2\cdot[0^2 - 1] = -2$

Da der einzige Punkt mit horizontaler Tangente zwischen den beiden Nullstellen im Graphen ein Tiefpunkt ist und f stetig ist, ist der berechnete Punkt der Tiefpunkt $T(1|-2)$

b) **Wendepunkt** Skript Kurvendiskussion 8.

$$f''(x) = \frac{x\cdot\frac{4}{x} - 1\cdot 4\ln x}{x^2} = \frac{4 - 4\ln x}{x^2}$$ Quotientenregel Skript §05

Bed.: $f''(x) = 0 \Rightarrow 4 - 4\ln x = 0 \Rightarrow 4\ln x = 4 \Rightarrow \ln x = 1 \Rightarrow x = e$

$y = f(e) = 2\cdot(\ln e)^2 - 2 = 2\cdot(1)^2 - 2 = 0$

$f''(x)$ besitzt bei $x = e$ einen VZW von + nach –, also: Wendepunkt $W(e|0)$

Wendetangente Skript Kurvendiskussion 9.

$x_o = e$ bzw. Tangentengleichung Skript Kurvendiskussion 5.

$f(x_o) = 0$

$f'(x_o) = \frac{4\ln e}{e} = \frac{4\cdot 1}{e} = \frac{4}{e}$

Über Geradengleichung

$y = mx + t$

$0 = \frac{4}{e}\cdot(e) + t$

$t = -4$

oder über Formel

$y = \frac{4}{e}(x - e) + 0$

$y = \frac{4}{e}x - \frac{4}{e}\cdot e$

$$y = \frac{4}{e}\cdot x - 4$$

c) ① $\lim\limits_{x\to 0} f'(x) = \lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\overset{\to -\infty}{4\ln x}}{\underset{\to 0}{x}}\right) = -\infty$

② $\lim\limits_{x\to +\infty} f'(x) = \lim\limits_{x\to +\infty}\left(\dfrac{\overset{\to +\infty}{4\ln x}}{\underset{\to +\infty}{x}}\right) = 0$

x ist „stärker“als lnx

③ $f'(0,5) = \dfrac{4\ln 0,5}{0,5} \approx -5,5$

④ $f'(10) = \dfrac{4\ln 10}{10} \approx 0,9$

Verbotene Rechnungen: Skript Kurvendiskussion 4.

d) Das Integral ist die Bilanz der gerichteten Flächen zwischen Graph und x-Achse im Bereich von e^{-1} und c (wird von links nach rechts integriert, dann: Flächen oberhalb der x-Achse minus Flächen unterhalb der x-Achse).

① Untere Grenze: $c=e^{-1}$: Hier hat die Fläche keine Ausdehnung, da die untere und obere Integrationsgrenze übereinstimmen und somit hat das Integral den Wert 0.

② Rechts der Nullstelle x = e gibt es eine Stelle c > e, für die die Fläche zwischen x =e und x = c oberhalb der x-Achse denselben Wert hat wie die Fläche zwischen den beiden Nullstellen x = e–1 und x = e. Damit hat die Flächenbilanz und somit das Integral den Wert 0.

e) Rationale Funktion Asymptoten Skript §02

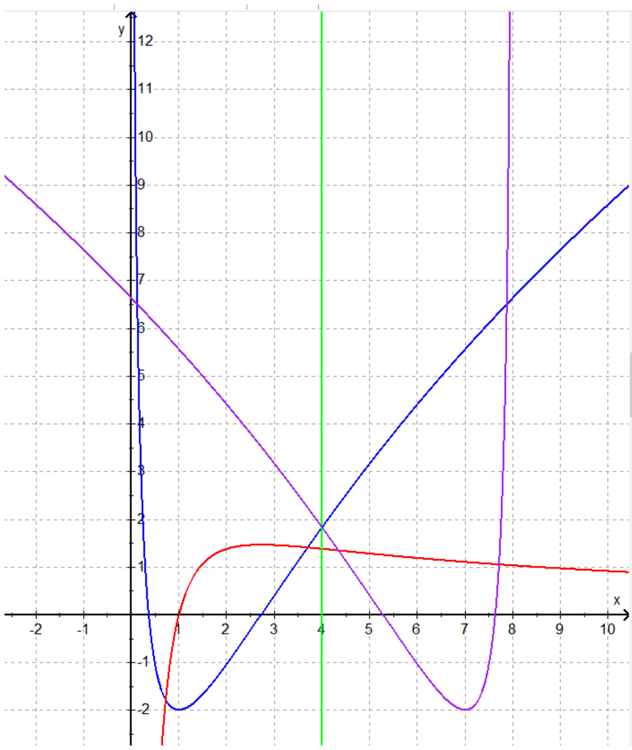
- vertikale Asymptote: x = 0
- schräge Asymptote: y = 1,5x – 4,5

f) $A = \int_1^2 f(x)dx = \left[1,5\cdot\frac{1}{2}x^2 - 4,5x + \ln x\right]_1^2 = 1,5\cdot\frac{1}{2}\cdot 2^2 - 4,5\cdot 2 + \ln 2 - \left(1,5\cdot\frac{1}{2}\cdot 1^2 - 4,5\cdot 1 + \ln 1\right) =$

= -6 + ln2 – (–3,75) = ln2 – 2,25 ≈ 1,56

Abweichung: $\dfrac{1,623-(\ln 2 - 2,25)}{1,623} \approx 4,08\%$

2. a) G_g in Abbildung 1



b) Der gespiegelte Graph muss dann um 8 Einheiten in positive x-Richtung verschoben werden. Man kann sich einen bestimmten Punkt ansehen, z.B. den, der im ursprünglichen Graphen die x-Koordinate +4 hat. Bei Spiegelung an der Achse x = 4 bleibt er an derselben Stelle.

$a = -1 \quad b = +8 \qquad g(x) = f(-1 \cdot x + 8)$

c) Es handelt sich hierbei um den Winkel φ, den die beiden zueinander symmetrischen Graphen an ihrer Schnittstelle x = 4 miteinander einschließen. Dazu berechnet man den Winkel α, den die Tangente an G_f (Skript Kurvendiskussion 5.) dort mit der x-Achse einschließt, ermittelt dann den Winkel zwischen der Vertikalen (Symmetriechse Abb. Zu 2.a)) über α* = 90° – α und verdoppelt diesen.

$\tan\alpha = f'(4) \qquad$ mit $f'(x) = \dfrac{4\ln x}{4}$ aus 1.a)

$\tan\alpha = \dfrac{4\ln 4}{4} = \ln 4 \qquad \alpha \approx 54{,}195° \quad \Rightarrow \alpha^* \approx 90° - 54{,}195° = 35{,}805°$

$\varphi = 2\alpha^* \approx 71{,}61°$

Das Aquarium wird vollständig mit Wasser gefüllt.

d) Hierzu muss man berechnen, um wie viel der Tiefpunkt T(1|–2) unterhalb der Wasseroberfläche (Höhe f(0,2)) liegt.

Wassertiefe $h = f(0{,}2) - (-2) = 2\cdot[(\ln 0{,}2)^2 - 1] + 2 \approx 5{,}18$ (m)

e) Das Integral beschreibt die Fläche zwischen der Oberseite und dem Graphen von f im Intervall [0,2; 4]. Diese Fläche muss verdoppelt werden, damit die gesamte Vorderfläche berechnet werden kann. Die Höhe des Prismas ist die Länge des Aquariums, also 12 und muss noch multipliziert werden. Somit erhält man den Term

$$12 \cdot 2 \cdot \int_{0,2}^{4} \left(f(0,2) - f(x) \right) dx = 24 \cdot \int_{0,2}^{4} \left(f(0,2) - f(x) \right) dx$$