

Teil A

1. Rechter Winkel: Skript §05 Punkt 6.

$$\text{a) } \overrightarrow{CA} = \begin{pmatrix} 2-0 \\ 3-2 \\ 1-0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \overrightarrow{CB} = \begin{pmatrix} 2-0 \\ -3-2 \\ 1-0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{CA} \circ \overrightarrow{CB} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ 1 \end{pmatrix} = 4 - 5 + 1 = 0 \Rightarrow \text{rechter Winkel bei C.}$$

b) ① Einfache Variante nur Erklärung:

Da C auf der x_2 Achse liegt und A, B zur x_1x_2 -Ebene symmetrisch sind, muss nur der zu C bezüglich der x_1x_3 -Ebene symmetrische Punkt **D(0|-2|0)** gewählt werden.

② Rechnerisch:

D(0 | d | 0) (liegt ja auf der x_2 -Achse)

$$\overrightarrow{DA} = \begin{pmatrix} 2-0 \\ 3-d \\ 1-0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3-d \\ 1 \end{pmatrix} \quad \overrightarrow{DB} = \begin{pmatrix} 2-0 \\ -3-d \\ 1-0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3-d \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{DA} \circ \overrightarrow{DB} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3-d \\ 1 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 2 \\ -3-d \\ 1 \end{pmatrix} = 4 + (3-d)(-3-d) + 1$$

Skalarprodukt Null setzen (rechter Winkel und d berechnen:

$$4 + (3-d)(-3-d) + 1 = 0$$

$$4 + (-9 - 3d + 3d + d^2) + 1 = 0$$

$$d^2 = 4$$

$$d_{1|2} = \pm 2 \text{ (mit } +2 \text{ hat man C), also: } \mathbf{D(0|-2|0)}$$

2. E: $2x_1 + x_2 - 2x_3 = -18$

a) Flächeninhalt eines Dreiecks ist „0,5mal Grundlinie mal der dazu senkrechten Höhe“. Da die beiden Achsen aufeinander senkrecht stehen muss man nur die entsprechenden Koordinaten der SP (x_1 -Koordinate beim SP mit der x_1 -Achse, da $x_2 = x_3 = 0$) verwenden.

$$\text{SP mit } x_1\text{-Achse (} x_2 = x_3 = 0 \text{ einsetzen): } 2x_1 + 0 - 2 \cdot 0 = -18 \Rightarrow x_1 = -9 \Rightarrow g = 9$$

Nicht benötigt: Schnittpunkt: S(-9|0|0)

$$\text{SP mit } x_2\text{-Achse (} x_1 = x_3 = 0 \text{ einsetzen): } 2 \cdot 0_1 + x_2 - 2 \cdot 0 = -18 \Rightarrow x_2 = -18 \Rightarrow h = 18$$

$$\mathbf{A = \frac{1}{2} \cdot g \cdot h = \frac{1}{2} \cdot 9 \cdot 18 = 81}$$

b) Jeder Vektor, der die Form $\vec{n} = \lambda \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ hat, ist ein Normalenvektor von E.

Dieser Vektor als Ortsvektor muss in E eingesetzt werden für x_1 , x_2 und x_3 .

$$2 \cdot (2\lambda) + (1\lambda) - 2 \cdot (-2\lambda) = -18$$

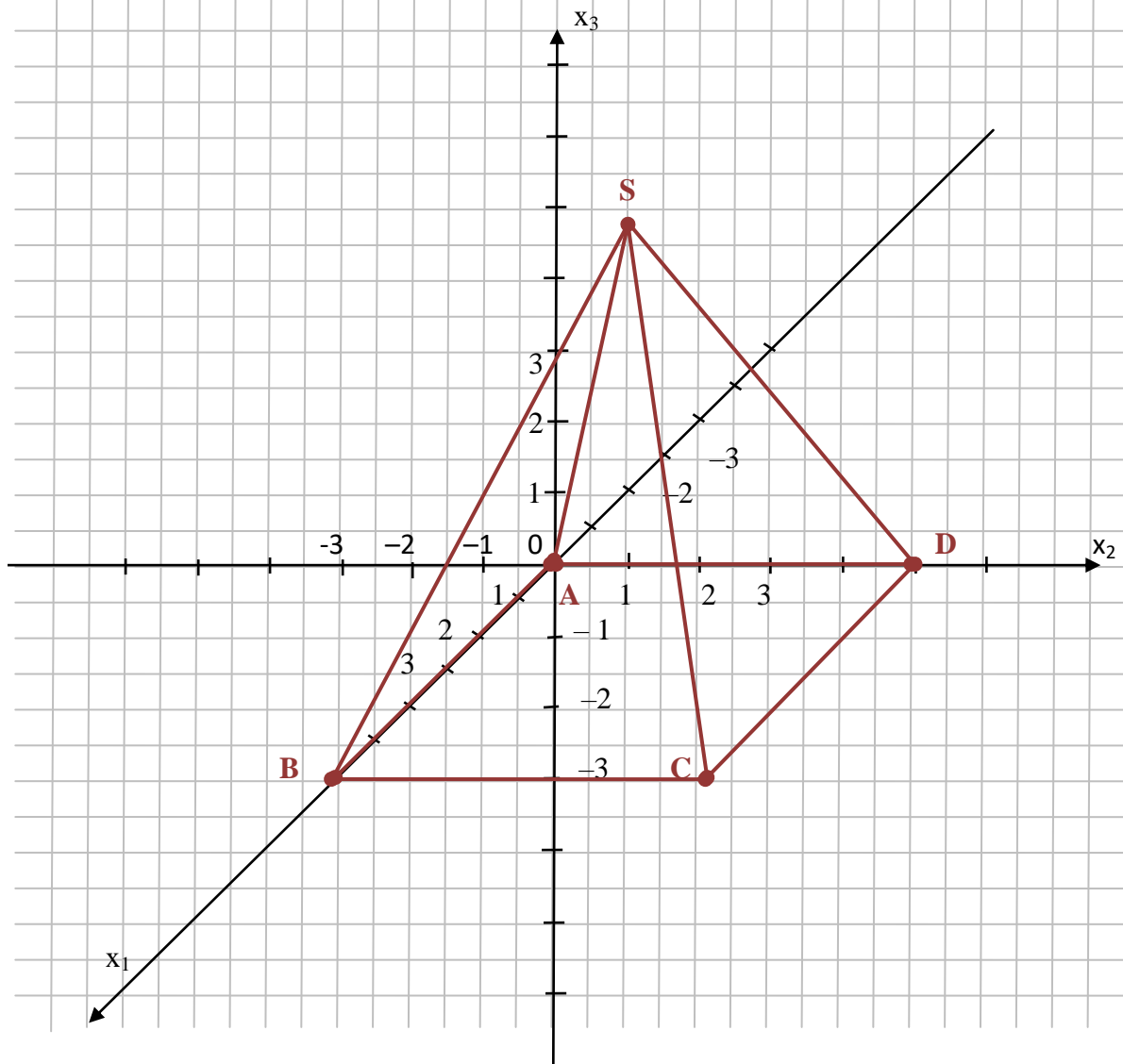
$$4\lambda + \lambda + 4\lambda = -18$$

$$\lambda = -2$$

$$\lambda \text{ in } \vec{n} \text{ einsetzen: } \vec{n} = -2 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Teil B

a) $B(5|0|0)$ und $D(0|5|0)$



b) Ebenengleichung Skript §10 Punkt 3. Hier wird D als Aufhängepunkt gewählt.

$$\overrightarrow{DA} = \begin{pmatrix} 0-0 \\ 0-5 \\ 0-0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -5 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{u} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \overrightarrow{DS} = \begin{pmatrix} 2,5-0 \\ 2,5-5 \\ 6-0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2,5 \\ -2,5 \\ 6 \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{v} = \begin{pmatrix} 5 \\ -5 \\ 12 \end{pmatrix}$$

$$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 5 \\ -5 \\ 12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12-0 \\ -[0-0] \\ 0-1 \cdot 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 \\ 0 \\ -5 \end{pmatrix} = \vec{n}$$

$$\vec{n} \circ (\vec{X} - \vec{D}) = 0$$

$$\begin{pmatrix} 12 \\ 0 \\ -5 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} = 0 \quad \text{Damit: } F: 12x_1 - 5x_3 = 0$$

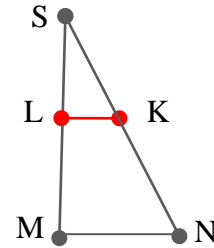
c) Der Winkel zwischen 2 Ebenen ist gesucht (Skript §12 Punkt 2.). Zwei benachbarte Zeltwände

liegen auf den bekannten Ebenen E mit Normalenvektor $\vec{n}_E = \begin{pmatrix} 0 \\ 12 \\ 5 \end{pmatrix}$ und F mit $\vec{n}_F = \begin{pmatrix} 12 \\ 0 \\ -5 \end{pmatrix}$.

$$\cos \alpha = \frac{\begin{pmatrix} 0 \\ 12 \\ 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 12 \\ 0 \\ -5 \end{pmatrix}}{\sqrt{0+144+25} \cdot \sqrt{144+0+25}} = \frac{-25}{\sqrt{169} \cdot \sqrt{169}} = \frac{-25}{169} \approx -0,148 \Rightarrow \alpha \approx 98,51^\circ$$

d) Damit die Bedingung erfüllt ist, muss die Lichtquelle L lotrecht unter der Spitze hängen, also dieselben x_1 - und x_2 -Koordinaten wie D haben; benötigt wird also die x_3 -Koordinate von L.

Dazu kann man die Punkte M als Mittelpunkt der quadratischen Grundfläche und N als Mittelpunkt der Seite [AD] mit S verbinden und erhält nebenstehendes Dreieck. Nach Aufgabenstellung ist dann der Abstand der



Lampe von der Wand ADS die Länge der roten Strecke [KL], also 0,5. Man muss also nur die Länge der Strecke [SL] nach dem Strahlensatz bestimmen. Dabei gilt nach Aufgabenstellung:

$$\overline{MS} = 6 \quad (\text{Höhe der Spitze über dem Boden})$$

$$\overline{MN} = 2,5 \quad (\text{Hälfte der Grundkante})$$

$$\overline{LK} = 0,5 \quad (\text{Abstand der Lampe von der Wand } 0,5 \text{ m})$$

$$\text{Strahlensatz: } \frac{\overline{SL}}{\overline{MS}} = \frac{\overline{LK}}{\overline{MN}} \quad (\text{Trick: Die gesuchte Streckenlänge } \overline{SL} \text{ links oben})$$

$$\frac{\overline{SL}}{6} = \frac{0,5}{2,5} \Rightarrow \overline{SL} = \frac{1}{5} \cdot 6 = 1,2$$

Die Lampe hängt also 1,2 m tiefer als S, also auf der Höhe $x_3 = 6 - 1,2 = 4,8$

Lampe: **L(2,5 | 2,5 | 4,8)**

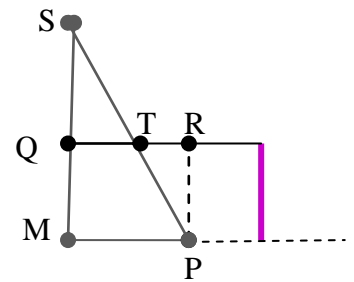
e) Analog zu d) bestimmt man den Mittelpunkt P der Grundkante [CD]: P(2,5 | 2,5 | 0)

Symmetrieachse g ist die Gerade PS:

$$\vec{PS} = \begin{pmatrix} 2,5 - 2,5 \\ 2,5 - 5 \\ 6 - 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2,5 \\ 6 \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{u} = \begin{pmatrix} 0 \\ -5 \\ 12 \end{pmatrix}$$

$$g: \vec{X} = \begin{pmatrix} 2,5 \\ 2,5 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -5 \\ 12 \end{pmatrix}$$

- f) Hilfreich ist auch hier eine ebene Skizze, die die Symmetrieachse PS enthält. Die Stange ist violett eingezeichnet. Das Vordach hat eine Breite von 1,40 m. Zu berechnen ist die Länge des Dachs. Diese entspricht der Entfernung der Punkte T und P, da das Dach in diesem Bereich aus der Wand geschnitten ist. Da gilt $\overline{QR} = \overline{MP} = 2,5$, muss man \overline{QT} mit dem Strahlensatz bestimmen, damit dann \overline{TR} und mit dem Satz des Pythagoras \overline{TP} .



Es gilt also:

$$\overline{MS} = 6 \quad (\text{Höhe der Spitze über dem Boden})$$

$$\overline{RP} = 1,8 \quad \text{und} \quad \overline{MQ} = 1,8 \quad (\text{Stangenhöhe})$$

$$\overline{QS} = 6 - 1,8 = 4,2 \quad (\text{Entfernung der Spitze zu Punkt Q, der 1,8 m über dem Boden ist})$$

$$\overline{MP} = \overline{QR} = 2,5 \quad (\text{Hälfte der Grundkante})$$

$$\text{Strahlensatz (gesucht } \overline{QT} \text{): } \frac{\overline{QT}}{\overline{MP}} = \frac{\overline{QS}}{\overline{MS}}$$

$$\frac{\overline{QT}}{2,5} = \frac{4,2}{6} \Rightarrow \overline{QT} = 0,7 \cdot 2,5 = 1,75$$

$$\text{Also ist } \overline{TR} = \overline{QR} - \overline{QT} = 2,5 - 1,75 = 0,75$$

$$\text{Pythagoras: } \overline{TP}^2 = \overline{TR}^2 + \overline{RP}^2 \Rightarrow \overline{TP}^2 = 0,75^2 + 1,8^2 = 3,8025 \Rightarrow \overline{TP} = 1,95$$

$$\text{Vordach-Fläche: } A = 1,95 \text{ m} \cdot 1,4 \text{ m} = 2,73 \text{ m}^2$$