Teil A

1. Gegeben sind die Punkte A(2|1|–4), B(6|1|–12) und C(0|1|0).

a) ① Entweder Streckengleichung Skript §09 Punkt 3. für [AB] aufstellen

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 6-2 \\ 1-1 \\ -12+4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -8 \end{pmatrix} \quad [AB]: \vec{X} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -8 \end{pmatrix} \quad \lambda \in [0;\ 1]$$

und C einsetzen:

$$[AB]: \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -8 \end{pmatrix} \begin{matrix} \Rightarrow 0 = 2 + 4\lambda \Rightarrow \lambda = -0{,}5 \\ \Rightarrow 1 = 1 + 0\lambda \Rightarrow 1 = 1 (w) \\ \Rightarrow 0 = -4 - 8\lambda \Rightarrow \lambda = -0{,}5 \end{matrix}$$

Es gibt also einen eindeutigen Wert für λ, damit liegt C auf der Geraden. Da λ aber nicht im Intervall [0;1] liegt, liegt C nicht auf der Strecke.

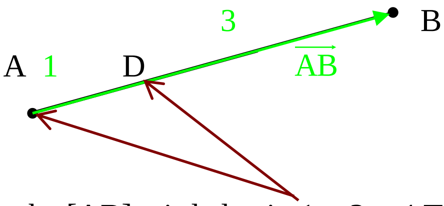
② oder Vektoren $\overrightarrow{AB}$ und $\overrightarrow{AC}$ vergleichen (hier nur ohne Rechnung erläutert):

$\overrightarrow{AC} = \lambda \cdot \overrightarrow{AB}$ (Beachte: λ wird mit dem Verbindungsvektor der Streckenendpunkte multipliziert)

Sind $\overrightarrow{AB}$ und $\overrightarrow{AC}$ linear abhängig, dann liegt C auf der Geraden,

Ist $\overrightarrow{AC}$ länger als $\overrightarrow{AB}$ ($\lambda > 1$) oder andersherum orientiert ($\lambda < 0$), dann liegt C nicht auf der Geraden

b) Skizze:



Die Strecke [AB] wird also in 1 + 3 = 4 Teile zerlegt. Damit ist der Wert von λ für D in der Gleichung einfach ¼.

$$\vec{D} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix} + \frac{1}{4} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -6 \end{pmatrix}$$

D(3|1|–6)

2. E: $2x_1 + x_2 - 2x_3 = -18$

a) Flächeninhalt eines Dreiecks ist „0,5mal Grundlinie mal der dazu senkrechten Höhe“. Da die beiden Achsen aufeinander senkrecht stehen muss man nur die entsprechenden Koordinaten der SP (x_1-Koordinate beim SP mit der x_1-Achse, da $x_2 = x_3 = 0$) verwenden.

SP mit x_1-Achse ($x_2 = x_3 = 0$ einsetzen): $2x_1 + 0 - 2\cdot 0 = -18 \Rightarrow x_1 = -9 \Rightarrow g = 9$
Nicht benötigt: Schnittpunkt: S(–9|0|0)

SP mit x_2-Achse ($x_1 = x_3 = 0$ einsetzen): $2\cdot 0_1 + x_2 - 2\cdot 0 = -18 \Rightarrow x_2 = -18 \Rightarrow h = 18$

A = ½·g·h = ½·9·18 = 81

b) Jeder Vektor, der die Form $\vec{n} = \lambda \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ hat, ist ein Normalenvektor von E.

Dieser Vektor als Ortsvektor muss in E eingesetzt werden für x_1, x_2 und x_3.

$2\cdot(2\lambda) + (1\lambda) - 2\cdot(-2\lambda) = -18$

$4\lambda + \lambda + 4\lambda = -18$

$\lambda = -2$

λ in $\vec{n}$ einsetzen: $\vec{n} = -2 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}$

Teil B

a) Die Punkte A und B haben dieselbe x_3-Koordinate $x_3 = 1$. Damit liegen sie und ihre Verbindungsgerade auf der Höhe 1 über der x_1x_2-Ebene. (1)

b) Rechteck Skript §13 Punkt 2.

$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 2-0 \\ 6-0 \\ 1-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \overrightarrow{DC} = \begin{pmatrix} -4+6 \\ 8-2 \\ 5-5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix}$ Damit: $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$

$\overrightarrow{AB} \circ \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} -6-0 \\ 2-0 \\ 5-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} -6 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} = -12+12+0 = 0$ (rechter Winkel bei A)

Mittelpunkt eines Rechtecks ist der Mittelpunkt einer Diagonalen, also z.B. von [AC]

Mittelpunkt einer Strecke (s. Merkhilfe)

$\vec{M} = \frac{1}{2}\cdot\left(\vec{A}+\vec{C}\right) = \frac{1}{2}\cdot\left[\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -4 \\ 8 \\ 5 \end{pmatrix}\right] = \frac{1}{2}\cdot\begin{pmatrix} -4 \\ 8 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$ => M(–2|4|3)]

c) Ebenengleichung. Skript §10 Punkt 3. Hier wird A als Aufhängepunkt gewählt.

$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} -6 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{v} = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ [vgl.. b)]

$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6-0 \\ -[2-(-0)] \\ 1-3\cdot(-3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ -2 \\ 10 \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{n} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix}$

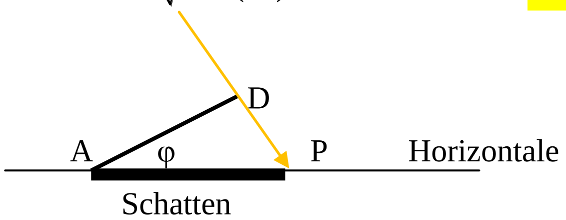
$\vec{n} \circ \left(\vec{X} - \vec{A}\right) = 0$

$$\begin{pmatrix}3\\-1\\5\end{pmatrix}\circ\left(\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right)=0$$ Damit: E: $3x_1 - x_2 + 5x_3 - 56 = 0$

d) Gesucht ist der Winkel zwischen der x_1x_2-Ebene (mit dem Normalenvektor $\overrightarrow{n_1}=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$) und der Ebene E mit dem Normalenvektor $\begin{pmatrix}3\\-1\\5\end{pmatrix}$ aus c) (Skript §12).

$$\cos\varphi = \frac{\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\circ\begin{pmatrix}3\\-1\\5\end{pmatrix}}{\sqrt{0^2+0^2+1^2}\cdot\sqrt{3^2+(-1)^2+5^2}} = \frac{5}{1\cdot\sqrt{35}} \Rightarrow \varphi \approx 32{,}3°$$ φ liegt im benötigten Bereich.

e)



Im bei D rechtwinkligen Dreieck gilt:

$$\cos\varphi = \frac{\left|\overrightarrow{AD}\right|}{\left|\overrightarrow{AP}\right|} \quad (*)$$

Die Strecke [AP] beschreibt die Länge des rechteckigen Schattens, [AB] bzw. [CD] die Höhe. Beide Streckenlängen müssen mit 0,8m multipliziert werden, damit die reale Länge bestimmt wird.

Aus Gleichung (*) bestimmt man $\left|\overrightarrow{AP}\right| = \frac{\left|\overrightarrow{AD}\right|}{\cos\varphi}$

und den Flächeninhalt des Schattens:

$$A = l\bullet h = 0{,}8\text{m}\cdot\left|\overrightarrow{AP}\right|\bullet 0{,}8\text{m}\cdot\left|\overrightarrow{AB}\right| = 0{,}8\text{m}\cdot\frac{\left|\overrightarrow{AD}\right|}{\cos\varphi}\bullet 0{,}8\text{m}\cdot\left|\overrightarrow{AB}\right|$$

$$A = \left|\overrightarrow{AB}\right|\cdot\frac{\left|\overrightarrow{AD}\right|}{\cos\varphi}\cdot(0{,}8\text{m})^2$$

f) Gesucht ist der Abstand des Punktes A (0|0|1) von der Achse a, die durch M verläuft und den Normalenvektor der x_1x_2-Ebene als Richtungsvektor besitzt.
Abstand Punkt-Gerade: Skript §11 Punkt2.

Achse a: $\vec{X} = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

① $\vec{n} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad H: \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \circ \left[\vec{X} - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right] = 0$

H: $x_3 - 1 = 0$ (NF)

② a in H: $3 + \mu - 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad \mu = -2$

μ in a: $\vec{F} = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} - 2 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad$ F(-2 | 4 | 1)

③ d(P;g) = $\left|\overrightarrow{AF}\right| = \left| \begin{pmatrix} -2-0 \\ 4-0 \\ 1-1 \end{pmatrix} \right| = \left| \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{4+16} = \sqrt{20}$

Damit gilt: r = 0,8 m$\cdot\sqrt{20}$ =80 cm$\cdot\sqrt{20}$ ≈ 358 cm