Teil A

1. $f(x) = \frac{(3+x)^2}{x-1}$

a) **Definitionsmenge** BWL Skript Kurvendiskussion 1.

B: $x - 1 = 0$ => $x = 1$ $D = IR\backslash\{1\}$

SP mit x-Achse Skript Kurvendiskussion 2.

$(3 + x)^2 = 0$

$3 + x = 0$

$x = -3$ N(–3|0)

SP mit y-Achse Skript Kurvendiskussion 2.

$f(0) = \frac{(3+0)^2}{0-1} = \frac{9}{-1} = -9$ $S_y(0|-9)$

b) Brüche zusammenfassen mit Erweitern auf den Hauptnenner (x – 1)

$$x + 7 + \frac{16}{x-1} = \frac{(x+7)(x-1)}{x-1} + \frac{16}{x-1} = \frac{x^2 + 6x - 7 + 16}{x-1} = \frac{x^2 + 6x + 9}{x-1} = \frac{(x+3)^2}{x-1}$$

Die Gerade g mit der Gleichung y = x + 7 ist schräge Asymptote des Graphen G_f.

2. a) Nullstellen: Skript Kurvendiskussion 2.

$f(x) = 0$ => $2 \cdot e^{\frac{1}{2}x} - 1 = 0$ => $2 \cdot e^{\frac{1}{2}x} = 1$ => $e^{\frac{1}{2}x} = 0{,}5 \,|\ln\ldots$

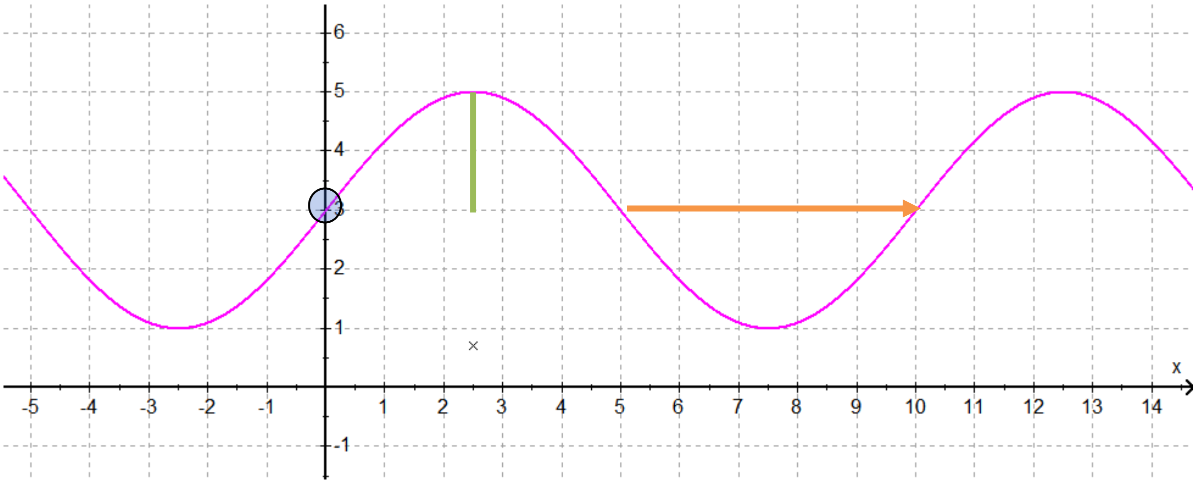
=> $\frac{1}{2}x = \ln(0{,}5)$ => $x = 2\ln(0{,}5)$ (oder $x = -2\ln 2$)

b) Wenn die Tangente mit den Koordinatenachsen ein gleichschenkliges Dreieck begrenzt, müssen der x-Achsenabschnitt (Nullstelle) und der y-Achsenabschnitt denselben Wert haben. Man kann also die Tangente bestimmen, dann ihre Nullstelle und mit dem y-Achsenabschnitt vergleichen (da sie durch den auf der y-Achse befindlichen Punkt S(0|1) verläuft, ist der y-Achsenabschnitt 1). Leichter ist es jedoch, zu beachten, dass nur Geraden mit der Steigung 1 oder –1 die vorgegebene Eigenschaft besitzen. Man braucht also nur die Steigung der Tangente (Skript Kurvendiskussion 5.) m = f'(0) berechnen und zeigen, dass m = 1 oder m = –1.

$f'(x) = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot e^{\frac{1}{2}x}$ Kettenregel Skript §11

$f'(0) = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot e^{\frac{1}{2}\cdot 0} = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 = 1$ $(e^0 = 1)$

3. $g: x \mapsto p + q \cdot \sin\left(\frac{\pi}{r}x\right)$ mit p,q, r $\in \mathbb{N}$



a) Der Graph ist der einer um p = 3 nach oben verschobenen Sinus-Funktion
Die Amplitude beträgt q = 2
Eine halbe Periode beträgt r = 5.

b) x wird durch (x–2) ersetzt: $h(x) = 3 + 2 \cdot \sin\left(\frac{\pi}{5}(x-2)\right)$

4. Änderungsrate: Skript §03

a) Die mittlere Änderungsrate entspricht der Sekantensteigung, also dem Quotienten

$m_S = \frac{n(t_2) - n(t_1)}{t_2 - t_1}$, wobei hier gilt: $t_1 = 0$ und $t_2 = 2$ („die ersten beiden Stunden“)

$n(t_2) = n(2) = 3 \cdot 2^2 - 60 \cdot 2 + 500 = 392$

$n(t_1) = n(0) = 3 \cdot 0^2 - 60 \cdot 0 + 500 = 500$

$\frac{n(t_2) - n(t_1)}{t_2 - t_1} = \frac{392 - 500}{2 - 0} = -54$ (Pollen pro m³ pro Stunde)

b) Bedingung: n‘(t) = –30 wobei gilt: n‘(t) = 3·2t – 60 = 6t – 60
Also: 6t – 60 = –30 => 6t = 30 => t = 5; d.h. 5 Stunden nach Beginn der Messung

Teil B

1. $f(x) = 2e^{-x}\cdot(2e^{-x} - 1)$ Nullstelle: $x = \ln 2$

a) $f'(x) = 2\,e^{-x}\cdot(-2e^{-x}) + (-2e^{-x})\cdot(2e^{-x} - 1) =$ Produktregel Skript §05

$= -4e^{-x}\cdot e^{-x} - 4e^{-x}\cdot e^{-x} + 2e^{-x} = 2e^{-x}\cdot(-2\,e^{-x} - 2\,e^{-x} + 1) = 2e^{-x}\cdot(1 - 4e^{-x})$

b) Extrempunkte: Skript Kurvendiskussion 6.

$f'(x) = 0 \quad \Rightarrow 2e^{-x}\cdot(1 - 4e^{-x}) = 0$

Nur der zweite Faktor kann Null werden, da $2e^{-x} > 0$ für alle x

$1 - 4e^{-x} = 0 \quad \Rightarrow \quad 4e^{-x} = 1 \quad \Rightarrow \quad e^{-x} = 0{,}25 \mid \ln\ldots$

$\Rightarrow -x = \ln(0{,}25) \Rightarrow \quad x = -\ln(0{,}25) = \ln 4$

Kehrbruch („Hoch –1“) im Argument ändert das Vorzeichen des ln.

$y = f(\ln 4) = 2e^{-\ln 4}\cdot(2e^{-\ln 4} - 1) =^{*} \; 2e^{\ln 0{,}25}\cdot(2e^{\ln 0{,}25} - 1) =$

$= \; 2\cdot 0{,}25 \cdot (2\cdot 0{,}25 - 1) = 0{,}5\cdot(-0{,}5) = -0{,}25$

* e und ln heben sich nur gegenseitig auf, wenn kein Faktor oder „–“-Zeichen dazwischen ist, also wieder „Hoch –1“ im Argument ändert das Vorzeichen des ln.

Art des Extrempunkts über VZ-Tabelle Skript Kurvendiskussion 6.

		ln4	
$2e^{-x}$	+		+
$(1 - 4e^{-x})$	–		+
f'(x)	–		+

Tiefpunkt T(ln4|–0,25)

Alternativ: **Art des Extrempunkts über f''(x)** Skript Kurvendiskussion 10.

c) $F(x) = 2e^{-x} - 2e^{-2x}$ Stammfunktion Skript §17

$F'(x) = -2e^{-x} - 2\cdot(-2)\,e^{-2x} = -2e^{-x} + 4\,e^{-2x} \; = \; 2e^{-x}\cdot(2e^{-x} - 1) = f(x)$

Kettenregel Skript §11 Beachte $(e^{x})^2 = e^{2x}$

F ist eine Stammfunktion von f

$$\lim_{x\to+\infty} F(x) = \lim_{x\to+\infty}\left[2e^{-x} - 2e^{-2x}\right] = \lim_{x\to+\infty}\left[2\underbrace{e^{-x}}_{\to 0}(1 - \underbrace{e^{-x}}_{\to 0})\right] = 0$$

d) Es gilt: F'(x) = f(x). Da f(x) bei ln2 die einzige Nullstelle mit VZW von + nach – besitzt, liegt hier der einzige Hochpunkt für den Graphen von F vor, 0,5 ist also das absolute Maximum.

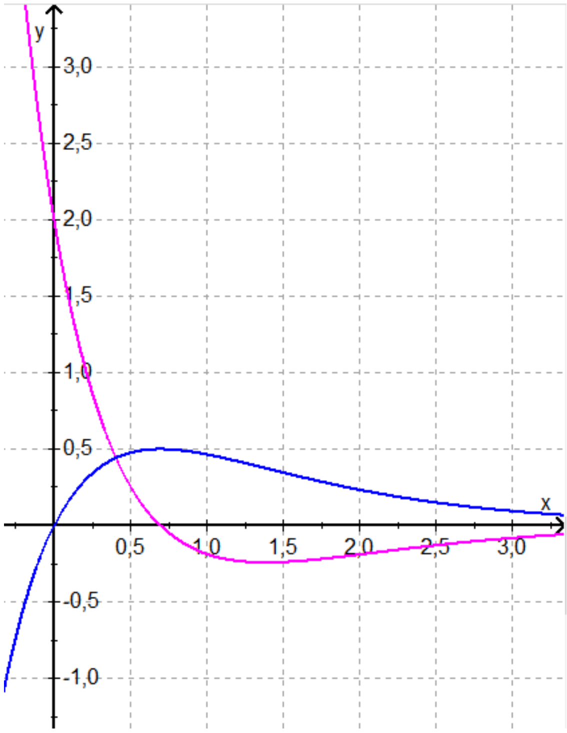
Es gilt: F''(x) = f(x). Da f ein Extremum bei x = ln 4 hat, hat f'(x) = F''(x) dort eine Nullstelle mit VZW, somit liegt eine Wendestelle für F vor.

$F(\ln 4) = 2e^{-\ln 4} - 2e^{-2\ln 4} = 2e^{\ln 0{,}25} - 2e^{2\ln 0{,}25} = 2e^{\ln 0{,}25} - 2e^{\ln 0{,}25^2} = 2\cdot 0{,}25 - 2\cdot 0{,}25^2 =$

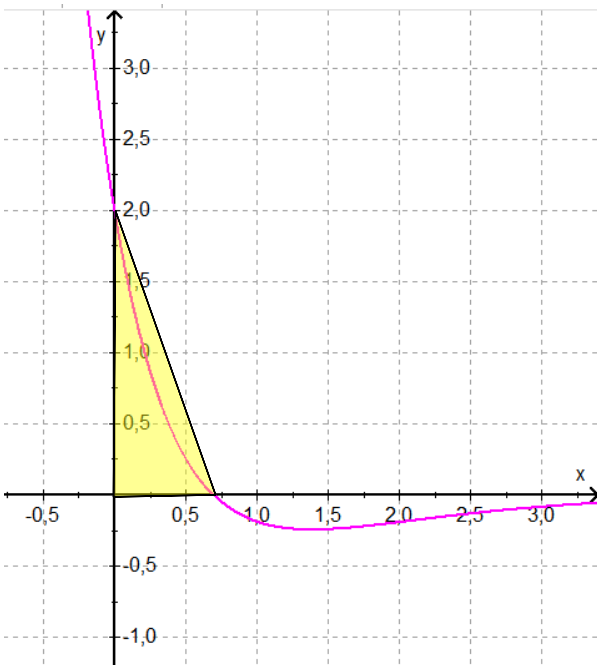
$= 0{,}5 - 0{,}125 = 0{,}375$

e) $F(0) = 2e^{-0} - 2e^{-2\cdot 0} = 2 - 2 = 0$ Beachte: $e^{0} = 1$

Zu e)



Zu f)



f) $A_{Dreieck} = \frac{1}{2} \cdot \ln 2 \cdot 2 = \ln 2$

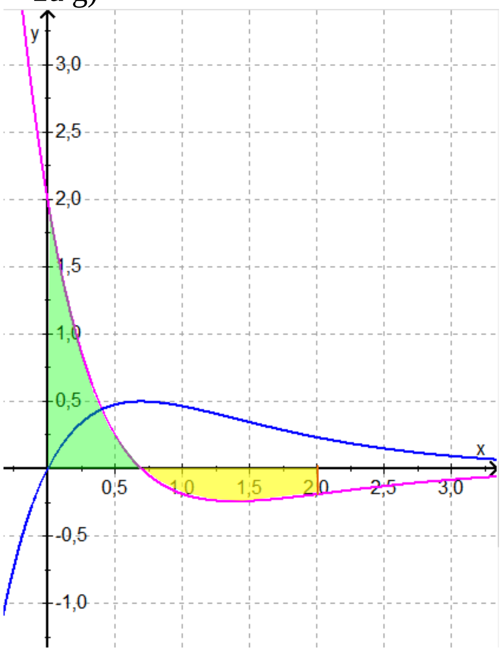
$$A = \int_0^{\ln 2} f(t)dt = [F(x)]_0^{\ln 2} = F(\ln 2) - F(0) = 0,5 - 0 = 0,5$$

Abweichung: $\frac{\ln 2 - 0,5}{0,5} \approx 38,6\%$

g) $F_0(x) = \int_0^x f(t)dt = [F(t)]_0^x = F(x) - F(0) = F(x) - 0 = F(x)$

$F_0(2)$ bedeutet, dass der Gesamtinhalt der gerichteten Flächen (Fläche oberhalb der x-Achse minus unterhalb) zwischen dem Graphen von f und der x-Achse im Bereich von 0 bis 2 etwa 0,234 beträgt.

zu g)



h) Eine solche Funktion hat die Eigenschaft, dass sie sich von F_0 um eine additive Konstante unterscheidet und keine Nullstelle besitzt. Da 0,5 der größte Wert ist, den F_0 annimmt, muss der Graph von F_0 *um mehr als 0,5 nach unten* verschoben werden, damit die neue Funktion keine Nullstelle hat.

Beispielsweise: $F^*(x) = 2e^{-x} - 2e^{-2x} - 0,6$ (Verschiebung um 0,6 nach unten)

Bi 211	Tl 207	Pb 207
$B(x) = e^{-2x}$	$F(x)$	$P(x) = 1 – B(x) – F(x)$

Die Einheit 6 Minuten bedeutet, dass 12 Minuten 2 Einheiten entsprechen.

a) **Bi211:** $B(2) = e^{-2\cdot 2} = e^{-4}$: 1,8%

Tl207: $F(2) = 2e^{-2} - 2e^{-2\cdot 2} = 2e^{-2} - 2e^{-4}$ 23,4%

Pb207: $P(2) = 1 - e^{-4} - (2e^{-2} - 2e^{-4}) = 1 - 2e^{-2} + e^{-4}$ 74,8%

b) Die Funktion F besitzt ihr globales Maximum bei x = ln2, also sind das 6·ln2 Minuten, das sind 6·ln2·60 Sekunden, also ca. 250 Sekunden.

c) Damit dies erfüllt ist, müssen alle drei Funktionen für denselben Wert von x den Wert $\frac{1}{3}$ annehmen.

$$B(x) = \frac{1}{3} \Rightarrow e^{-2x} = \frac{1}{3} \mid \ln\ldots \Rightarrow -2x = \ln\left(\frac{1}{3}\right) \Rightarrow$$

$$x = -0{,}5\ln\left(\frac{1}{3}\right) = -\ln\left(\frac{1}{3}\right)^{0{,}5} = -\ln\left(\sqrt{\frac{1}{3}}\right)$$

Die Gleichung $F(x) = \frac{1}{3}$ lässt sich schwer lösen, deshalb setzt man den x –Wert $\ln\sqrt{3}$ in F ein:

$$F\left(-\ln\left(\sqrt{\frac{1}{3}}\right)\right) = 2e^{\ln\left(\sqrt{\frac{1}{3}}\right)} - 2e^{2\ln\left(\sqrt{\frac{1}{3}}\right)} = 2\sqrt{\frac{1}{3}} - 2e^{\ln\left(\sqrt{\frac{1}{3}}\right)^2} = 2\cdot\sqrt{\frac{1}{3}} - 2\cdot\frac{1}{3} \neq \frac{1}{3}$$

d) $$\lim_{x\to+\infty} P(x) = \lim_{x\to+\infty}\left[1 - \underbrace{F(x)}_{\to 0\ \text{(vgl. 1.c))}} - \underbrace{e^{-2x}}_{\to 0}\right] = 1$$

Nach hinreichend langer Zeit werden so gut wie alle Kerne in Pb207-Kerne zerfallen sein.