Teil A

1. $g: x \mapsto 2 \cdot \sqrt{4+x} - 1$

   a) Definitionsmenge BWL Skript Kurvendiskussion 1.

   W: $4 + x \geq 0$ => $x \geq -4$ $D_f = [-4; \infty[$

   SP mit y-Achse Skript Kurvendiskussion 2.

   $g(0) = 2 \cdot \sqrt{4+0} - 1 = 2 \cdot 2 - 1 = 3$ $S_y(0|3)$

   b) ① $w(x) \to w(x+4)$: Graph wird um 4 nach links (in negative x-Richtung) verschoben

   ② $2 \cdot w_1(x)$: Graph wird um den Faktor 2 in y-Richtung gestreckt.

   ③ $w_2(x) - 1$: Graph wird um 1 in negative y-Richtung verschoben.

   Die Wurzelfunktion hat als Wertemenge $W_w = [0; \infty[$. Durch die Schritte ① und ② verändert sich die Wertemenge nicht. Schritt 3 verändert die untere Grenze zu –1.

   $W_g = [-1; \infty[$

2. $f(x) = 2 \cdot e^{\frac{1}{2}x} - 1$

   a) Nullstellen: Skript Kurvendiskussion 2.

   $f(x) = 0$ => $2 \cdot e^{\frac{1}{2}x} - 1 = 0$ => $2 \cdot e^{\frac{1}{2}x} = 1$ => $e^{\frac{1}{2}x} =$

   => $\frac{1}{2}x = \ln(0{,}5)$ => $x = 2\ln(0{,}5)$ (oder $x = -2\ln 2$)

   b) Wenn die Tangente mit den Koordinatenachsen ein gleichschenkliges Dreieck begrenzt, müssen der x-Achsenabschnitt (Nullstelle) und der y-Achsenabschnitt denselben Wert haben. Man kann also die Tangente bestimmen, dann ihre Nullstelle und mit dem y-Achsenabschnitt vergleichen (da sie durch den auf der y-Achse befindlichen Punkt S(0|1) verläuft, ist der y-Achsenabschnitt 1). Leichter ist es jedoch, zu beachten, dass nur Geraden mit der Steigung 1 oder –1 die vorgegebene Eigenschaft besitzen. Man braucht also nur die Steigung der Tangente (Skript Kurvendiskussion 5.) m = f'(0) berechnen und zeigen, dass m = 1 oder m = –1.

   $f'(x) = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot e^{\frac{1}{2}x}$ Kettenregel Skript §11

   $f'(0) = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot e^{\frac{1}{2} \cdot 0} = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 = 1$ ($e^0 = 1$)

3. a) Es gibt natürlich viele Möglichkeiten. Am einfachsten ist es, beim Begriff „senkrechte Asymptote" über eine gebrochenrationale Funktion (Skript §02) nachzudenken. x =2 ist nicht die einzige Asymptote wegen der Achsensymmetrie. Also sind die Polstellen auf jeden Fall x = 2 und x = –2, das Nennerpolynom enthält die Faktoren (x–2) und (x + 2), das Zählerpolynom darf nur aus geraden Potenzen von x bestehen oder eine Konstante sein (und die Faktoren des Nenners dürfen nicht kürzbar sein.

   Beispielsweise: $f(x) = \frac{1}{(x+2)(x-2)}$ oder $f(x) = \frac{4x^2+8}{(x+2)(x-2)}$

b) Der Graph muss mit der x-Achse 2 Flächenstücke einschließen, die gleich groß sind; eines oberhalb, das andere unterhalb der x-Achse. Also beispielsweise eine Gerade, deren Nullstelle $x = 1$ ist, also in der Mitte zwischen 0 und 2 liegt.

Also beispielsweise $g(x) = 1 - x$ oder $g(x) = x - 1$, aber auch $g(x) = 4x - 4$

4. Änderungsrate: Skript §03

a) Die mittlere Änderungsrate entspricht der Sekantensteigung, also dem Quotienten

$m_S = \frac{n(t_2) - n(t_1)}{t_2 - t_1}$, wobei hier gilt: $t_1 = 0$ und $t_2 = 2$ („die ersten beiden Stunden“)

$n(t_2) = n(2) = 3 \cdot 2^2 - 60 \cdot 2 + 500 = 392$

$n(t_1) = n(0) = 3 \cdot 0^2 - 60 \cdot 0 + 500 = 500$

$\frac{n(t_2) - n(t_1)}{t_2 - t_1} = \frac{392 - 500}{2 - 0} = -54$ (Pollen pro m^3 pro Stunde)

b) Bedingung: $n'(t) = -30$ wobei gilt: $n'(t) = 3 \cdot 2t - 60 = 6t - 60$

Also: $6t - 60 = -30$ => $6t = 30$ => $t = 5$; d.h. 5 Stunden nach Beginn der Messung

Teil B

1. a) **Tangentengleichung** Skript Kurvendiskussion 5.

$$h'(x) = 3\cdot(-1+\ln x) + 3x\cdot\left(-0+\frac{1}{x}\right) = -3+3\ln x + 3x\cdot\frac{1}{x} = -3+3\ln x+3 = 3\ln x$$

Produkt- und Kettenregel Skript §05 und Skript §11

$x_0 = e$
$f(x_0) = 3\cdot e\cdot(-1 + \ln e) = 3e\cdot(-1 + 1) = 0$
$f'(x_0) = 3\cdot\ln e = 3\cdot 1 = 3 = m$

Über Geradengleichung	oder über Formel
$y = mx + t$	$y = 3(x - e) + 0$
$0 = 3\cdot e + t$	$y = 3x - 3e$
$t = -3e$	

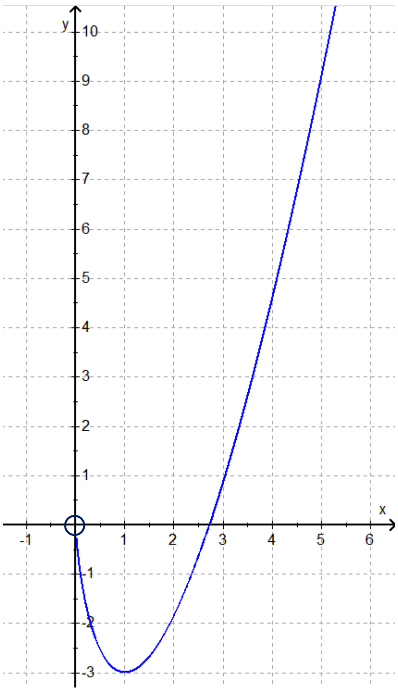
$y = 3\cdot x - 3e$

Winkel zwischen Tangente und der Horizontalen (x–Achse): $\tan\alpha = 3$ => $\alpha \approx 71{,}6°$

b) **Monotonieverhalten** Skript §08

$h'(x) = 0$ => $3\ln x = 0$ => $\ln x = 0 \mid e^{\cdots}$ => $x = 1$

Da für $x < 1$ gilt $\ln x < 0$ und für $x > 1$ gilt: $\ln x > 0$, ergibt sich:
G_h ist streng monoton fallend für $x \in]0; 1]$ (Definitionsmenge: $D =]0; +\infty[$)
G_h ist streng monoton steigend für $x \in [1; +\infty[$
Der Extrempunkt ist der Tiefpunkt $T(1|-3)$ nötig für die Begründung von W



Grenzverhalten und Begründung

$$\lim_{x\to+\infty} h(x) = \lim_{x\to+\infty}\left[\underbrace{3x}_{\to+\infty}\cdot\underbrace{(-1+\ln x)}_{\to+\infty}\right] = +\infty$$

Damit nimmt y alle Werte größer als –3 an und $W = [-3; +\infty[$

c) $$\lim_{x\to 0} h(x) = \lim_{x\to 0}\left[\underbrace{3x}_{\to 0}\cdot\underbrace{(-1+\ln x)}_{\to-\infty}\right] = 0$$

Skript Kurvendiskussion 4. 3x „stärker“ als die Klammer; „Loch“ L(0|0)

$$\lim_{x\to 0} h'(x) = \lim_{x\to 0}[3\cdot\ln x] = -\infty$$

Das heißt der Graph hat eine vertikale Tangente, die y-Achse in diesem Fall. Graph: s. Abb.

d) Umkehrfunktion Skript §09

$D_{h^{*-1}} = W_{h^*} = W_h = [-3; +\infty[$

$W_{h^{*-1}} = D_{h^*} = [1; +\infty[$

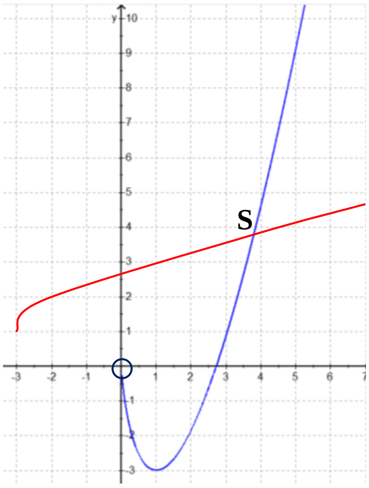
$h^*(x) = x$

$3x \cdot (-1 + \ln x) = x = x$ |:x (nur möglich, da $x \neq 0$!)

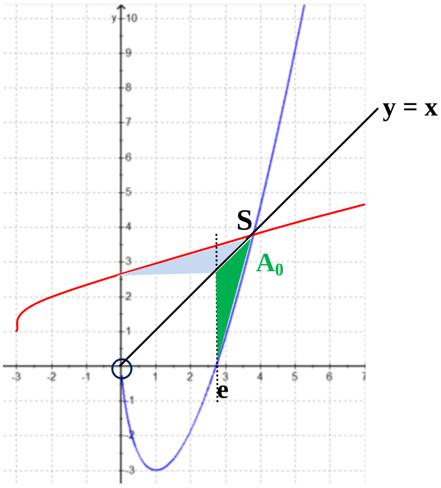
$3 \cdot (-1 + \ln x) = 1 \quad \Rightarrow \quad -1 + \ln x = \frac{1}{3} \quad \Rightarrow \quad \ln x = \frac{4}{3} \,\Big|\, e^{\cdots} \quad \Rightarrow \quad x = e^{\frac{4}{3}} \approx 3{,}79$

Da die Gerade y = x nur aus Punkten mit derselben x- wie y-Koordinate besteht, gilt: $S\left(e^{\frac{4}{3}} \middle| e^{\frac{4}{3}}\right)$

e)



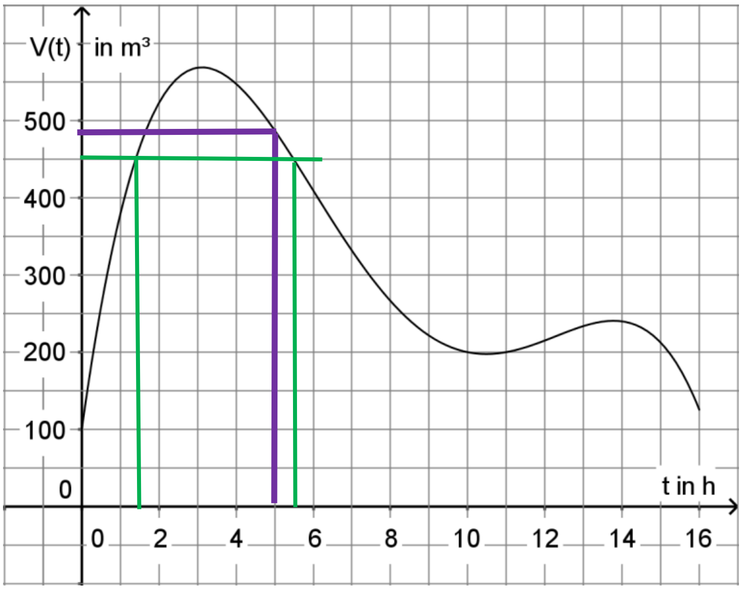
f)



zu f) Die Nullstelle von h* ist x = e. Mit der Differenz im Integranden wird dann das Flächenstück zwischen der Gerade und dem Graphen von h* beschrieben zwischen x = e und dem Punkt S, also x_S (grün markiert). Ein entsprechendes Flächenstück liegt auch (blaugrau) symmetrisch dazu. Die gesuchte Fläche entsteht, wenn man noch das Quadrat mit der Seitenlänge e ergänzt, also gilt:

$A = 2 \cdot A_0 + e^2$

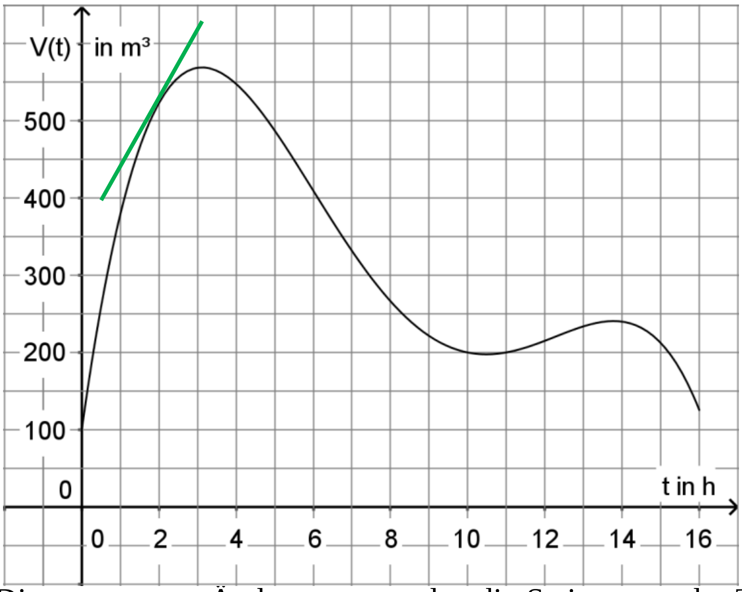
2. a)



Violett: V(5) ≈ 490 (m³)

Grün: Mindestens 450m³ etwa im Intervall [1,4; 5,5]

b)



Die momentane Änderungsrate, also die Steigung m der Tangente (grün) ermittelt man so: Etwas weniger als 2 Kästchen (also ca. 90m³) nach oben und ein Kästchen (also 1 h) nach rechts:

$$m = \frac{90\text{m}^3}{1\text{h}} = 90\frac{\text{m}^3}{\text{h}}$$

c) V(t) ist das Volumen zu einem Zeitpunkt t; V(t + 6) das Volumen 6 Stunden später. Um V(t+6) zu erhalten, werden 350 (m³) von V(t) subtrahiert. Das Volumen ist also um 350m³ geringer geworden.

Das Volumen beträgt 6 Stunden nach einem bestimmten Zeitpunkt 350m³ weniger, als zu diesem Zeitpunkt t.

Für t = 5 hieße das, dass zum Zeitpunkt t = 5 +6 = 11 das Volumen um 350 m³ kleiner ist, als zum Zeitpunkt t = 5. Es gilt aber: V(5) ≈ 490 und V(11) ≈ 200. Die Differenz ist 290. Die Aussage gilt also nicht.

d) Um die Frage zu beantworten macht man eine VZ-Betrachtung (z.B. über Nullstellenberechnung und VZ-Tabelle.)

$g(t) = 0{,}4t\cdot(2t^2 - 39t + 180) = 0{,}8t\cdot(t^2 - 19{,}5t + 90)$

Mit Vieta oder Lösungsformel für quadratische Gleichungen könnte man den quadratischen Term faktorisieren. Da in der Aufgabenstellung die Bereiche vorgegeben sind, $t > 0$, weiß man auch, dass der erste Faktor positiv ist. Für den quadratischen Term könnten die beiden Nullstellen $x = 7{,}5$ und $x = 12$ aus der Aufgabenstellung in Frage kommen. Durch Einsetzen erkennt man, dass $g(7{,}5) = 0$ und $g(12) = 0$. Nachdem ein quadratischer Term höchstens 2 Nullstellen hat, sind dies die einzigen beiden Nullstellen. Setzt man jetzt noch jeweils einen Wert aus den beiden Intervallen ein, so hat man die jeweiligen Vorzeichen des gesamten Intervalls.

z.B. $g(1) > 0$ und $g(10) < 0$

Faktorisierung: $g(t) = 0{,}8t\cdot(t - 7{,}5)(t - 12)$ und VZ-Tabelle ergibt dasselbe.

e) Es handelt sich um das Gesamtvolumen des im Zeitraum a bis b zugeflossenen Wassers (negativer Wert: abgeflossenes Wasser).

$$V(7{,}5) = \int_0^{7{,}5} g(t)dt = \left[0{,}4\cdot\left(\frac{1}{2}t^4 - 13t^3 + 90t^2\right)\right]_0^{7{,}5} = 0{,}4\cdot\left(\frac{1}{2}\cdot 7{,}5^4 - 13\cdot 7{,}5^3 + 90\cdot 7{,}5^2\right) \approx 464$$

Die anfänglichen $150m^3$ addiert, ergibt sich, dass $614m^3$ Wasser im Becken sind.

Da $g(t)$ (die mom. Volumensänderungsrate) für $t > 7{,}5$ negativ ist, nimmt das Volumen ab diesem Zeitpunkt ab und somit sind $614m^3$ maximal.