Teil A

1. a) Man muss zeigen, dass der RV der Gerade senkrecht zur Ebene verläuft, das heißt parallel zum Normalenvektor $\vec{n}$ der Ebene:

RV der Gerade: $\overrightarrow{PQ} = \begin{pmatrix} 5-1 \\ 2-0 \\ 6-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$ Normalenvektor: $\vec{n} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

Es gilt: $2 \cdot \vec{n} = \overrightarrow{PQ}$, damit sind die beiden Vektoren parallel.

b) Die gesuchte Ebene muss senkrecht zur Strecke, also parallel zu E aus 1.a), verlaufen und den Mittelpunkt M der Strecke [PQ] enthalten. Damit bestimmt man die Normalenform:

$$\vec{M} = \frac{\vec{P}+\vec{Q}}{2} = \frac{\begin{pmatrix} 5+1 \\ 2+0 \\ 6+2 \end{pmatrix}}{2} = \frac{\begin{pmatrix} 6 \\ 2 \\ 8 \end{pmatrix}}{2} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Normalenform Skript §10 Punkt 3.

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \circ \left(\vec{X} - \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} \right) = 0$$ (Normalenvektor ist derselbe wie der von E wegen Parallelität)

E: $2x_1 + x_2 + 2x_3 - 15 = 0$

2. a) $2 \cdot \overrightarrow{AB} = 2 \cdot \begin{pmatrix} -4+2 \\ 0-1 \\ 6-4 \end{pmatrix} = 2 \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}$ Also: $\begin{pmatrix} -2-c_1 \\ 1-c_2 \\ 4-c_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}$ Damit: C(2|3|0)

b) Verwendet man die Aufgabe 2.a), dann ergibt sich, dass für den Vektor $\overrightarrow{AB}$ gilt:

$$\left|\overrightarrow{AB}\right| = \left|\begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}\right| = \sqrt{4+1+4} = 3$$

Damit hat B den Abstand 3 von A. Somit muss die Gerade durch B verlaufen und der Richtungsvektor orthogonal zu $\overrightarrow{AB}$ sein:

Beispielsweise: $\vec{X} = \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

Teil B

a) Der Punkt K_0 befindet sich vertikal über A in der Höhe 25 (x_3-Koordinate). Durch die Absenkung liegt der Punkt K_1 in der Höhe 6. Die anderen beiden Koordinaten dieser Punkte sind dieselben wie die von A, also: $K_0(45|60|25)$ und $K_1(45|60|6)$

Man muss nun den Unterschied zwischen den Streckenlängen z.B. $\overline{K_0W_1}$ und $\overline{K_1W_1}$ bestimmen: (Vektoriell oder Pythagoras)

$$\overline{W_1K_1} = \left|\overrightarrow{W_1K_1}\right| = \left|\begin{pmatrix} 45-0 \\ 60-0 \\ 6-30 \end{pmatrix}\right| = \left|\begin{pmatrix} 45 \\ 60 \\ -24 \end{pmatrix}\right| \sqrt{2025+3600+576} = \sqrt{6201}$$

$$\overline{W_1K_0} = \left|\overrightarrow{W_1K_0}\right| = \left|\begin{pmatrix} 45-0 \\ 60-0 \\ 25-30 \end{pmatrix}\right| = \left|\begin{pmatrix} 45 \\ 60 \\ -5 \end{pmatrix}\right| \sqrt{2025+3600+25} = \sqrt{5650}$$

Jedes Seil muss also um ($\sqrt{6201} - \sqrt{5650}$)m ≈ 3,58 m abgerollt werden.

b) Der Punkt K_2 muss auf der Geraden liegen. Verwendet man, dass seine x_3-Koordinate 10 ist und setzt ihn für X in die Gleichung von g ein (und die Koordinaten von K_2 ebenso), kann man zeilenweise Gleichungen lösen und erhält λ sowie die anderen beiden Koordinaten:

$$\begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 45 \\ 60 \\ 6 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 20 \\ 2 \end{pmatrix} \begin{matrix} \Rightarrow k_1 = 45+3\lambda & \Rightarrow & k_1 = 45+3\cdot 2 = 51 \\ \Rightarrow k_2 = 60+20\lambda & \Rightarrow & k_2 = 60+20\cdot 2 = 100 \\ \Rightarrow 10 = 6+2\lambda & \Rightarrow & \lambda = 2 \end{matrix}$$

Also: $K_2(51|100|10)$

c) Die Kamera ist also entlang der Richtung $\vec{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ ausgerichtet. Die neue Richtung wird beschrieben durch den Vektor $\vec{u} = \overrightarrow{K_2B} = \begin{pmatrix} 40-51 \\ 105-100 \\ 0-10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -11 \\ 5 \\ -10 \end{pmatrix}$

Zu berechnen ist also der Winkel zwischen den beiden Vektoren:

(Winkel zwischen zwei Vektoren Skript §05)

$$\cos\alpha = \frac{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} -11 \\ 5 \\ -10 \end{pmatrix}}{1\cdot\sqrt{121+25+100}} = \frac{10}{\sqrt{246}} \Rightarrow \alpha \approx 50{,}39°$$

d) **Normalenform** Skript §10 Punkte 2. und 3.

$$\overrightarrow{W_1W_2} = \begin{pmatrix} 90-0 \\ 0-0 \\ 30-30 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 90 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{W_1K_2} = \begin{pmatrix} 51-0 \\ 100-0 \\ 10-30 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 51 \\ 100 \\ -20 \end{pmatrix} = \vec{v}$$

$$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{pmatrix} 51 \\ 100 \\ -20 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 - 0 \\ -[0-(-1)\cdot(-20)] \\ 0 - (-1)\cdot 100 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 20 \\ 100 \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{n} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} \circ \left(\vec{X} - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 30 \end{pmatrix} \right) = 0$$

$E : x_2 + 5x_3 – 150 = 0$

Nachweis „H unter E“:

Stellt man die Lotgerade h von H auf das Spielfeld auf, erkennt man am Schnittpunkt S dieser Gerade mit der Ebene E, ob H über oder unter diesem Schnittpunkt liegt. (Vergleich der x_3-Koordinaten):

$$h: \vec{X} = \vec{H} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad h: \vec{X} = \begin{pmatrix} 50 \\ 70 \\ 15 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

h in E : $(70 + 0\cdot\lambda) + 5\cdot(15 + 1\cdot\lambda) – 150 = 0$

$70 + 75 + 5\cdot\lambda – 150 = 0$

$5\cdot\lambda – 5 = 0$

$\lambda = 1$

$$\lambda \text{ in } h: \vec{S} = \begin{pmatrix} 50 \\ 70 \\ 15 \end{pmatrix} + 1 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 50 \\ 70 \\ 16 \end{pmatrix}$$

Daran sieht man, dass S eine größere x_3-Koordinate hat als H (16 > 15), also liegt S über H oder H unter S und damit H unterhalb der Ebene.

e) Die Flugbahn ist nicht geradlinig und somit kann die durch die beiden Seile aufgespannte Ebene E, die ja geneigt ist, durchaus berührt oder geschnitten werden, somit auch die Seile und die Aussage ist falsch.