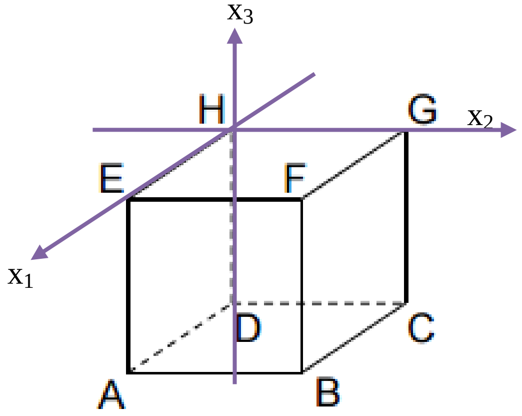
Teil A

1. a)

A(2 | 0 | -2)



b) Gerade FB mit Kugel um H(0|0|0) (Radius 3) schneiden:

FB: $\vec{X} = \vec{F} + \lambda\vec{u}$; RV $\vec{u}$ verläuft von B nach F. also parallel zur x_3-Achse.

FB: $\vec{X} = \begin{pmatrix}2\\2\\0\end{pmatrix} + \lambda\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$ Kugel: K: $\left[\vec{X} - \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}\right]^2 = 3^2$ => $\left[\vec{X}\right]^2 = 9$

FB in K einsetzen: $\left[\begin{pmatrix}2\\2\\0\end{pmatrix} + \lambda\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right]^2 = 9$ => $2 + 2 + \lambda^2 = 9$ => $\lambda^2 = 5$ => $\lambda_{1|2} = \pm\sqrt{5}$

λ in FB einsetzen. Da P auf der Strecke [FB] liegen soll muss der negative Wert verwendet werden:

$$\vec{P} = \begin{pmatrix}2\\2\\0\end{pmatrix} - \sqrt{5}\cdot\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\2\\-\sqrt{5}\end{pmatrix} \quad\Rightarrow\quad P\left(2\,|\,2\,|\,-\sqrt{5}\right)$$

2. a) $2\cdot\overrightarrow{AB} = 2\cdot\begin{pmatrix}-4+2\\0-1\\6-4\end{pmatrix} = 2\cdot\begin{pmatrix}-2\\-1\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-4\\-2\\4\end{pmatrix}$ Also: $\begin{pmatrix}-2-c_1\\1-c_2\\4-c_3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-4\\-2\\4\end{pmatrix}$ Damit: C(2|3|0)

b) Verwendet man die Aufgabe 2.a), dann ergibt sich, dass für den Vektor $\overrightarrow{AB}$ gilt:

$$\left|\overrightarrow{AB}\right| = \left|\begin{pmatrix}-2\\-1\\2\end{pmatrix}\right| = \sqrt{4+1+4} = 3$$

Damit hat B den Abstand 3 von A. Somit muss die Gerade durch B verlaufen und der Richtungsvektor orthogonal zu $\overrightarrow{AB}$ sein:

Beispielsweise: $\vec{X} = \begin{pmatrix}-4\\0\\6\end{pmatrix} + \lambda\begin{pmatrix}0\\2\\1\end{pmatrix}$

Teil B

a) **Normalenform** Skript §10 Punkte 2. und 3.

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 3-6 \\ 6-3 \\ 3-3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \vec{u} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 3-6 \\ 3-3 \\ 6-3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \vec{v} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\cdot 1 & - & 0 \\ -(-1\cdot 1- & & 0) \\ 0 & & -(-1)\cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \vec{n}$$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \circ \left(\vec{X} - \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} \right) = 0$$

E: $x_1 + x_2 + x_3 - 12 = 0$

b) Alle drei Punkte haben dieselbe x_3-Koordinate. Somit ist die Ebene parallel zur x_1x_2-Ebene.

$$\overrightarrow{CC'} = 2 \cdot \overrightarrow{CZ} = 2 \cdot \begin{pmatrix} 3-3 \\ 3-3 \\ 3-6 \end{pmatrix} = 2 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -6 \end{pmatrix}$$

Da dieser Vektor in die Richtung der x_3-Koordinatenachse läuft, steht er senkrecht auf die zur x_1x_2-Ebene parallele Ebene E.

c) **Quadrat** Skript §13 Punkt 2.

Da das Viereck punktsymmetrisch ist, ist es ein Parallelogramm.

Zu zeigen ist also nur, dass die Vektoren $\overrightarrow{AB}$ und $\overrightarrow{AB'}$ dieselbe Länge haben und aufeinander senkrecht stehen.

$$\overrightarrow{AB'} = \overrightarrow{AB} + 2 \cdot \overrightarrow{BZ} = \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} 3-3 \\ 3-6 \\ 3-3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \left|\overrightarrow{AB'}\right| = \sqrt{9+9} = 3\sqrt{2}$$

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{(vgl.a))} \quad \left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{9+9} = 3\sqrt{2}$$

$$\overrightarrow{AB} \circ \overrightarrow{AB'} = \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} -3 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} = 9 - 9 = 0 \quad \Rightarrow \overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{AB'}$$

d) Volumen einer Pyramide: $V = \frac{1}{3} G \cdot h$

Das Oktaeder besteht aus zwei Pyramiden, deren Grundfläche das Quadrat aus c) ist und deren Höhe der Abstand von C zum Mittelpunkt des Quadrats (also zu Z) ist.

$$\overrightarrow{CZ} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad h = \left|\overrightarrow{CZ}\right| = 3 \,(\text{vgl. b)!})$$

Also: $V = 2 \cdot \frac{1}{3} \cdot \left(3\sqrt{2}\right)^2 \cdot 3 = 36$

e) Die Seitenfläche ABC liegt in der Ebene E aus a), Die Seitenfläche AC'B liegt zu dieser symmetrisch bezüglich der Ebene, in der das Quadrat ABA'B' liegt. Aus b) ergibt sich, dass die Symmetrieebene parallel zur x_1x_2-Ebene ist. Man kann also den Winkel α zwischen diesen beiden Ebenen berechnen. Der doppelte Winkel β ist dann der gesuchte:

Winkel zwischen zwei Ebenen Skript §12

Normalenvektor der Ebene ABC: $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$; … der x_1x_2-Ebene: $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$\cos\alpha = \frac{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}{\sqrt{1+1+1} \cdot 1} = \frac{1}{\sqrt{3}} \quad \Rightarrow \quad \alpha = 54{,}74° \Rightarrow \beta = 109{,}5°$$

(4)

f) Alle Eckpunkte des Oktaeders liegen auf einer Kugel. Geben Sie eine Gleichung dieser Kugel an. Berechnen Sie den Anteil des Oktaedervolumens am Kugelvolumen.
Kugel hat den Mittelpunkt Z und den Radius 3 (vgl d) und b) – der Punkt C liegt auf der Kugel)

Also: K: $\left[\vec{X} - \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}\right]^2 = 9$

Anteil: $\frac{V_{Oktaeder}}{V_{Kugel}} = \frac{36}{\frac{4}{3} r^3 \pi} = \frac{36}{\frac{4}{3} 3^3 \pi} = \frac{1}{\pi}$