Teil A

1\. a) **Definitionsmenge** BWL Skript Kurvendiskussion 1. Hier: B und L

L: $x > 0$

B: $x^2 = 0 \Rightarrow x = 0$ $D = IR^+$

Nullstelle Skript Kurvendiskussion 2.

$f(x) = 0$

$\ln x = 0 \Rightarrow x = 1$

Grenzverhalten Skript Kurvendiskussion 4.

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0}\left(\frac{\ln x}{x^2}\right) = -\infty$$

Verbotene Rechnungen: $\ln 0 = -\infty$ (Zähler „schwächer“ als Nenner) $a/0^+ = -\infty$ (für $a < 0$)

b) **Tangentensteigung** Skript Kurvendiskussion 6.

$$f(x) = \frac{\ln x}{x^2} \Rightarrow f'(x) = \frac{x^2 \cdot \frac{1}{x} - \ln x \cdot 2x}{x^4} = \frac{x - 2x\ln x}{x^4} = \frac{x(1-2\ln x)}{x^4} = \frac{1-2\ln x}{x^3}$$

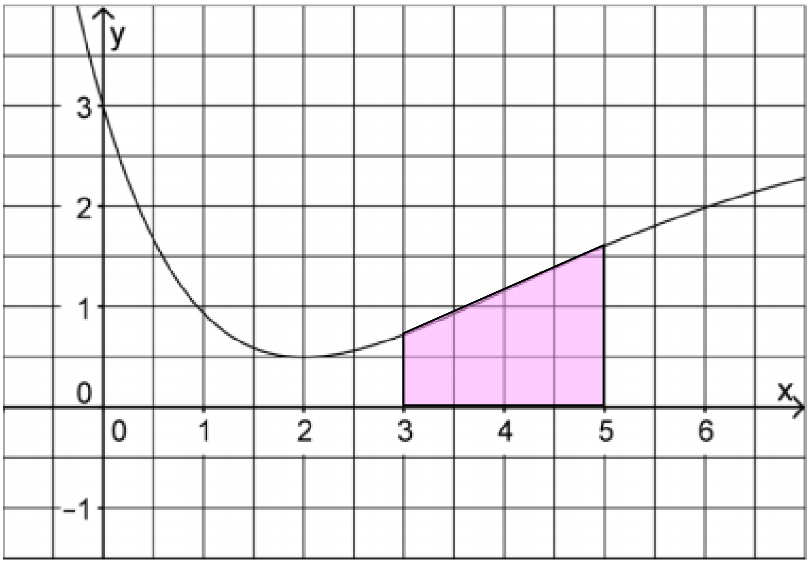
Quotientenregel Skript §05

$f'(x) = 0 \Rightarrow 1 - 2\ln x = 0 \Rightarrow 2\ln x = 1 \Rightarrow \ln x = 0{,}5 \Rightarrow x = e^{0,5}$

2\. a) Z.B. Graph von $y = x^3$ um 2 nach rechts geschoben: $f(x) = (x-2)^3$ $D = IR$

b) e-Funktion an der x-Achse gespiegelt: $g(x) = -e^x$ $D = IR$

3\.



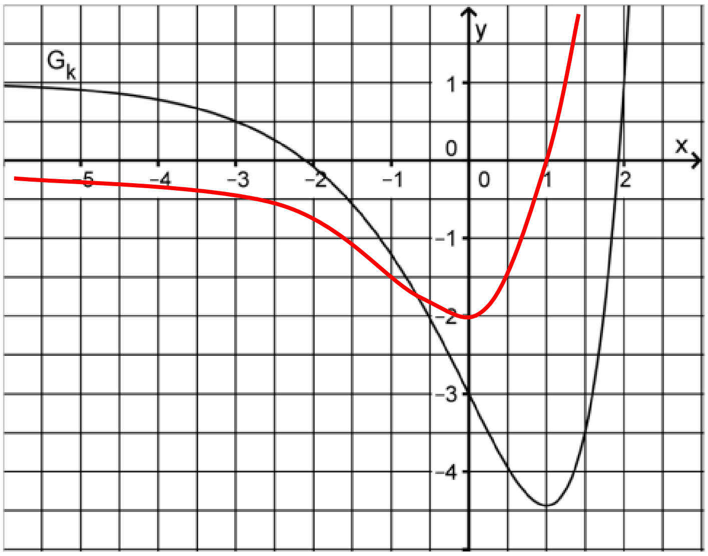
a) $\int_3^5 f(x)dx \approx 2{,}3$ (etwas mehr als 9 Kästchen und 9:4 = 2,25)

b) $F(2) \approx -0{,}6$ (ungefähr 2 Kästchen; negativ, da von rechts nach links integriert)

c) Eigenschaften von Stamm- und Integralfunktionen Skript §21

$$\int_3^b f(x)dx = F(b) - F(3) = F(b) - 0 = F(b)$$

4. Steigung im Wendepunkt: m ≈ –2 (Funktionswert von k‘ an der Stelle 0 ist damit auch –2)
Nullstelle von k‘ ist 1, da k einen Tiefpunkt bei x = 1 besitzt.



Teil B

1. a) Modellieren Skript §15

Bedingungen:

I. $p(-5) = 0$ und $p(5) = 0$

$-0{,}2\cdot(-5)^2 + 5 = -5 + 5 = 0$ und $-0{,}2\cdot 5^2 + 5 = -5 + 5 = 0$ erfüllt

(oder: Achsensymmetrie ausnutzen: $p(\pm 5) = 0$ bedeutet nur: $p(5) = 0$)

II. $f(0) = 5$

$-0{,}2\cdot 0^2+5 = 5$ erfüllt

Winkel: Skript Kurvendiskussion 6.

$f'(x) = -0{,}4x$ $f'(-5) = +2$ $\tan\alpha = 2 \Rightarrow \underline{\underline{\alpha = 63{,}43°}}$

b) Die Graphenpunkte haben die Koordinaten $P(x|p(x))$ bzw. $P(x|-0{,}2x^2 + 5)$. Der Abstand d eines Punktes vom Koordinatenursprung ergibt sich mit Pythagoras (Katheten sind die x- und die y-Koordinate, der Abstand d die Hypotenuse):

$d^2 = x^2 +[f(x)]^2$

$d^2 = x^2 + (-0{,}2x^2 + 5)^2 = x^2 + 0{,}04x^4 - 2x^2 + 25 = 0{,}04x^4 - x^2 + 25$ (binomische Formel)

Damit: $d(x) = \sqrt{0{,}04x^4 - x^2 + 25}$

c) Minimaler Abstand bedeutet, dass d(x) ein Minimum annimmt (denn der Ursprung und M sind derselbe Punkt). Die Wurzel ist minimal, wenn der Radikant $r(x) = 0{,}04x^4 - x^2 + 25$ minimal ist. Man berechnet also das Minimum der Funktion r mit der Ableitung:

$r'(x) = 0{,}16x^3 - 2x$ $r''(x) = 0{,}48x^2 - 2$

$r'(x) = 0$

$0{,}16x^3-2x = 0$

$x(0{,}16x^2 - 2) = 0$ $x_1 = 0$ $0{,}16x^2 - 2 = 0 \Rightarrow 0{,}16x^2 = 2 \Rightarrow$

$$x_{2|3} = \pm\sqrt{\frac{25}{2}} = \pm 2{,}5\sqrt{2} \approx \pm 3{,}54$$

Überprüfung Minimum/Maximum: Skript Kurvendiskussion 10.

$r''(0) = -2 < 0$ (Maximum – nicht gesucht)

$$r''\left(\pm\sqrt{\frac{25}{2}}\right) = 0{,}48\cdot\left(\pm\sqrt{\frac{25}{2}}\right)^2 - 2 = 4 > 0 \text{ (Minimum)},$$

d.h. die gesuchten x-Koordinaten sind $x_{2|3}$

Damit ergibt sich für den minimalen Abstand d_{min}:

$$d_{min} = d\left(\pm\sqrt{\frac{25}{2}}\right) = \sqrt{0{,}04\cdot\left(\pm\sqrt{\frac{25}{2}}\right)^4 - \left(\pm\sqrt{\frac{25}{2}}\right)^2 + 25} = 2{,}5\sqrt{3}$$

2. a) Modellieren Skript §15

Bedingung I:

$k(-5) = 0$ und $k(5) = 0$ (oder: Achsensymmetrie ausnutzen: $k(\pm 5) = 0$)

$k(-5) = 0$	$k(5) = 0$
$5\cos(-5c) = 0$	$5\cos(5c) = 0$
$\cos(-5c) = 0$	$\cos(5c) = 0$
$-5c = -0{,}5\pi$	$5c = 0{,}5\pi$
$c = 0{,}1\pi$	$c = 0{,}1\pi$

Querschnittsfläche:

Über Integral (Wegen Achsensymmetrie vereinfachbar im 2. Schritt)

$$A = \int_{-5}^{5} k(x)dx = 2\int_{0}^{5} k(x)dx = 2\cdot\int_{0}^{5}\left(5\cos(0{,}1\pi x)\right)dx =$$

$$= 2\cdot\left[\frac{50}{\pi}\sin(0{,}1\pi x)\right]_0^5 = 2\cdot\left[\frac{50}{\pi}\sin 0{,}5\pi - 0\right] = 2\cdot\left[\frac{50}{\pi}\cdot 1\right] = \frac{100}{\pi}\ (\text{m}^2)$$ (TR auf RAD stellen!!)

NR $[\sin(0{,}1\pi x)]' \cdot \frac{50}{\pi} = \cos(0{,}1\pi x)\cdot 0{,}1\pi\cdot\frac{50}{\pi}$

b) Bedingung III: $k(3) \geq 4$ bzw. $p(3) \geq 4$ (Wegen der Achsensymmetrie genügt es $x = +3$ zu betrachten | Breite 6m von $x = -3$ bis $x = +3$)

$k(3) = 5\cos(0{,}1\pi\cdot 3) = 1{,}7 < 4$ (TR auf RAD stellen!!)

$p(3) = -0{,}2\cdot 3^2 + 5 = 3{,}2 < 4$

Bedingungen sind nicht erfüllt.

3. a) **Begründung**

Die Graphenpunkte haben die Koordinaten $P(x|f(x))$. Der Abstand $d = 5$ eines Punktes vom Koordinatenursprung ergibt sich mit Pythagoras (Katheten sind die x- und die y-Koordinate, der Abstand d die Hypotenuse) – vgl. 1.b):

$d^2 = x^2 + [f(x)]^2$ => $25 = x^2 + [f(x)]^2$ => $[f(x)]^2 = 25 - x^2$

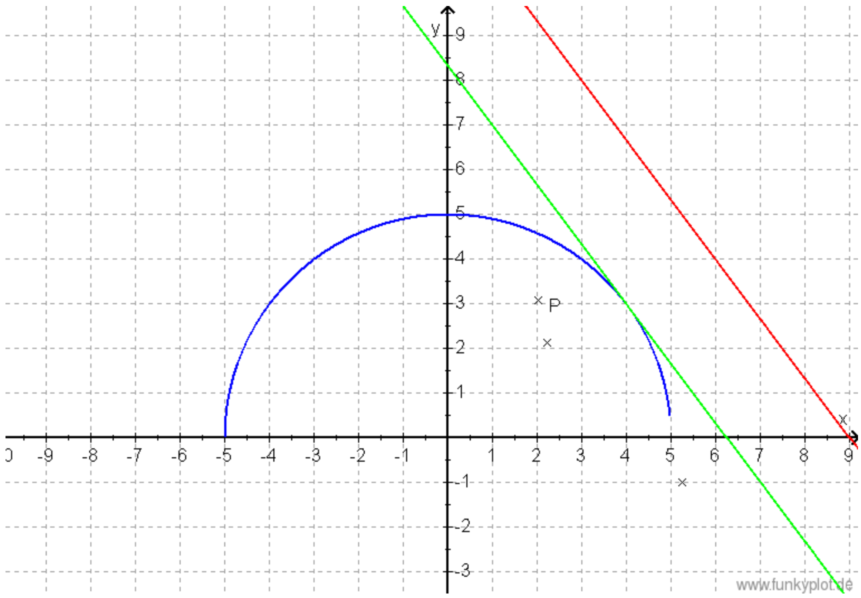
Damit: $f : x \mapsto \sqrt{25 - x^2}$ (Halbkreis um Ursprung mit Radius 5

Bedingung III: $f(3) \geq 4$

$f(3) = 4$

Bedingung erfüllt.

Graph: (Die Geraden gehören zu 3.d))



b) **Wert der Integralfunktion:**

Da es sich beim Graphen von f um einen Halbkreis handelt (vgl. a)), ist das Integral der Flächeninhalt eines Viertelkreises mit Radius 5 ($A = \frac{1}{4} \cdot r^2\pi$):

$$F(5) = \int_0^5 f(x)dx = \frac{1}{4} \cdot 5^2 \cdot \pi = \frac{25}{4}\pi$$

Infrage kommender Graph:

B: Es wird handelt sich um Flächenstücke oberhalb der x-Achse. Wenn x negativ ist, integriert man von rechts nach links, also ist das Integral für $x < 0$ negativ. In B ist dies nicht der Fall.

C: Mit zunehmendem x ($0 \le x \le 5$) kommt immer weniger Fläche hinzu. Der Graph der Integralfunktion muss also flacher werden mit zunehmendem x. Dies ist in C nicht gegeben.

Alternativ: Der Graph von f hat die Nullstelle $x = 5$. Damit muss der Graph der Integralfunktion dort eine waagrechte Tangente haben. Dies ist in C nicht der Fall.

Damit kommt nur A infrage.

c) Inhalt mit f modelliert: $A_f = 2 \cdot \frac{25}{4}\pi = \frac{25}{2}\pi$

Wert von 2.a): $A_k = \frac{100}{\pi}$

Differenz: $\frac{25}{2}\pi - \frac{100}{\pi}$

Anteil: $\dfrac{\frac{25}{2}\pi - \frac{100}{\pi}}{\frac{100}{\pi}} \approx 0{,}234 = 23{,}4\%$

Man benötigt also die ersten beiden Ableitungen:

$f'(x) = 4ax^3 + 3bx^2$

$f''(x) = 12ax^2 + 6bx$

Damit:

I.	$a \cdot 1^4 + b \cdot 1^3 = -1$		$a + b = -1$
II.	$12a \cdot 1^2 + 6b \cdot 1 = 0$		$\underline{12a - 6b = 0}$
		6I – II	$-6a = -6 \Rightarrow a = +1$
		a in I:	$1 + b = -1 \Rightarrow b = -2$

Also: $f(x) = x^4 - 2 \cdot x^3$

d) $f'(x) = \frac{-2x}{2\sqrt{25-x^2}} = \frac{-x}{\sqrt{25-x^2}}$

$f'(4) = \frac{-4}{\sqrt{25-4^2}} = \frac{-4}{3} = m_g$ damit sind g und die Tangente parallel.

e) Man bestimmt die y-Koordinate von R (f(4))

Dann bestimmt man die Gleichung der Normale n, deren Steigung $m_n = -\frac{1}{m_g}$ ist,

Gleichsetzen von g und n liefert den Punkt S. Der Abstand ergibt sich mit Pythagoras:
$e^2 = (xs - x_R)^2 + (y_s - y_R)^2$ über die Koordinaten der Punkte R und S.