Teil A

1. a) **Definitionsmenge** BWL Skript Kurvendiskussion 1. Hier: W und L

L: $x > 0$

W: $1 - \ln x \geq 0 \quad \Rightarrow \quad -\ln x \geq -1 \mid \cdot(-1) \quad \Rightarrow \quad \ln x \leq 1 \mid e^{\cdots} \quad \Rightarrow \quad x \leq e$

$D =]0; e]$

b) $f(x) = 2$

$\sqrt{1 - \ln x} = 2 \mid^2 \quad \Rightarrow \quad 1 - \ln x = 4 \quad \Rightarrow \quad \ln x = -3 \quad \Rightarrow \quad x = e^{-3} \approx 0{,}05 \in D$

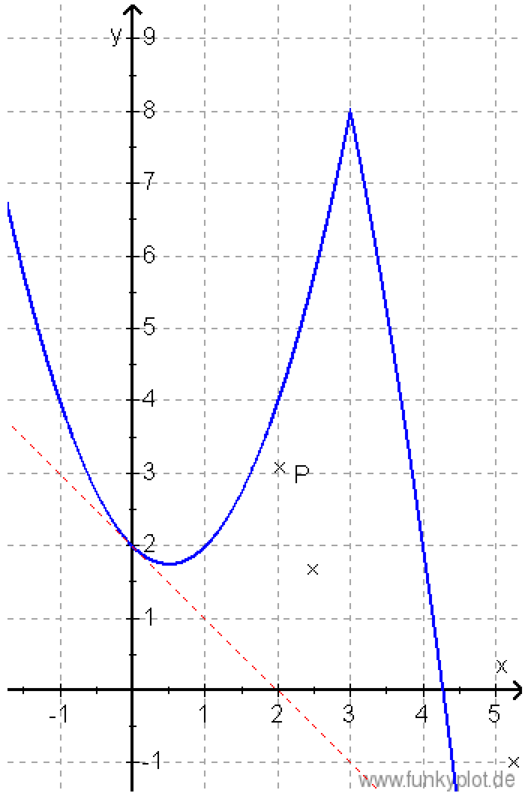
Probe: $\sqrt{1 - \ln e^{-3}} = 2$

2. Symmetrieverhalten Skript Kurvendiskussion 3.

$f(-x) = (-x)^2 \cdot \sin(-x) = -x^2 \cdot \sin x = -f(x)$ => Graph punktsymmetrisch bezüglich des Koordinatenursprungs

$$\int_{-\pi}^{\pi} x^2 \cdot \sin x \; dx = 0$$

3. Beispiel:



Hinweis: Der eingezeichnete Punkt P sowie der andere eingezeichnete Punkt haben für die Abbildung keinerlei Bedeutung.

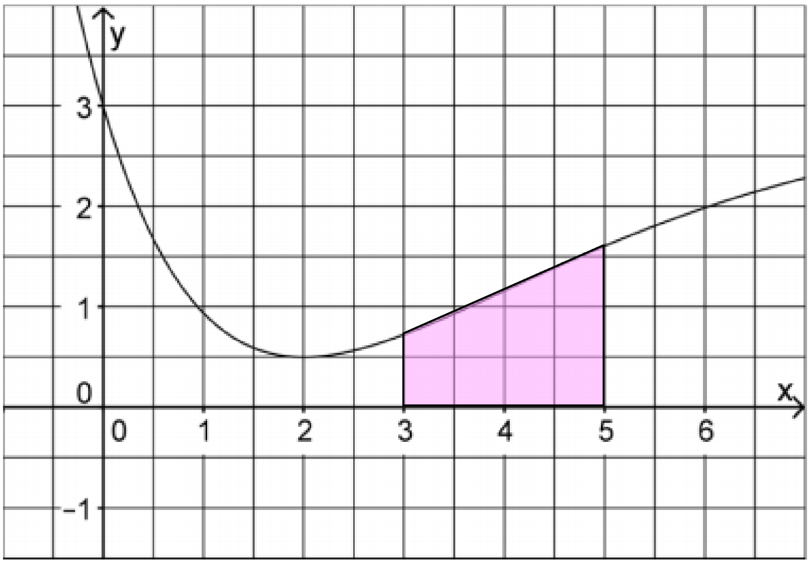
4. a) Da beim Ableiten sich der Grad des Polynoms um eins erniedrigt, ist die Ableitung von Grad 2, also der Graph eine Parabel. Die Extremstellen $x = 1$ und $x = 4$ der Funktion sind Nullstellen der Ableitung. Beim Hochpunkt wechselt die Ableitung ihr VZ von + nach -, beim Tiefpunkt umgekehrt. Damit ist die Parabel nach oben geöffnet.

b) Der x-Wert des Scheitelpunkts der Parabel liegt genau zwischen den Nullstellen, also bei $x = 2{,}5$.

Entweder: Hier hat die Ableitung also den kleinsten Wert, der Funktionsgraph fällt dort am steilsten, somit liegt ein Wendepunkt vor.

Oder: Da die erste Ableitung am Scheitelpunkt ihren Tiefpunkt besitzt, hat dort die 2. Ableitung eine Nullstelle mit VZW, somit der Funktionsgraph einen Wendepunkt.

5.



a) $\int_3^5 f(x)dx \approx 2{,}3$ (etwas mehr als 9 Kästchen und 9:4 = 2,25)

b) $F(2) \approx -0{,}6$ (ungefähr 2 Kästchen; negativ, da von rechts nach links integriert)

c) Eigenschaften von Stamm- und Integralfunktionen Skript §21

$$\int_3^b f(x)dx = F(b) - F(3) = F(b) - 0 = F(b)$$

Teil B

1. $f(x) = e^{\frac{1}{2}x} + e^{-\frac{1}{2}x}$

a) **Verlauf:** Beide Summanden sind positiv, also verläuft der Graph oberhalb der x-Achse.

Schnittpunkt mit y-Achse Skript Kurvendiskussion 2.

$f(0) = e^0 + e^0 = 1 + 1 = 2$ $S_y(0 \mid 2)$

b) **Symmetrieverhalten** Skript Kurvendiskussion 3.

$f(-x) = e^{\frac{1}{2}(-x)} + e^{-\frac{1}{2}(-x)} = e^{-\frac{1}{2}x} + e^{\frac{1}{2}x} = f(x)$ => Graph achsensymmetrisch zur y-Achse

b) **Grenzverhalten** Skript Kurvendiskussion 4.

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty}\left(e^{\frac{1}{2}x} + e^{-\frac{1}{2}x}\right) = \infty$ $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-+\infty}\left(e^{\frac{1}{2}x} + e^{-\frac{1}{2}x}\right) = \infty$

Verbotene Rechnungen: $e^{\infty} = +\infty$ und $e^{-\infty} = 0$

c) $f'(x) = \frac{1}{2}e^{\frac{1}{2}x} - \frac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}x}$

$f''(x) = \frac{1}{4}e^{\frac{1}{2}x} + \frac{1}{4}e^{-\frac{1}{2}x} = \frac{1}{4}\left(e^{\frac{1}{2}x} + e^{-\frac{1}{2}x}\right) = \frac{1}{4}f(x) > 0$ (vergleiche Begründung 1a))

Also ist G_f linksgekrümmt. Skript Kurvendiskussion 8. | Skript §18

d) Extrempunkte: Skript Kurvendiskussion 8.

$f'(x) = 0$ => $\frac{1}{2}e^{\frac{1}{2}x} - \frac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}x} = 0$ => $\frac{1}{2}e^{\frac{1}{2}x} = \frac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}x}$ => $e^{\frac{1}{2}x} = e^{-\frac{1}{2}x}$ | ln

$\frac{1}{2}x = -\frac{1}{2}x$ => $x = 0$ und $y = 2$ (vgl.a))

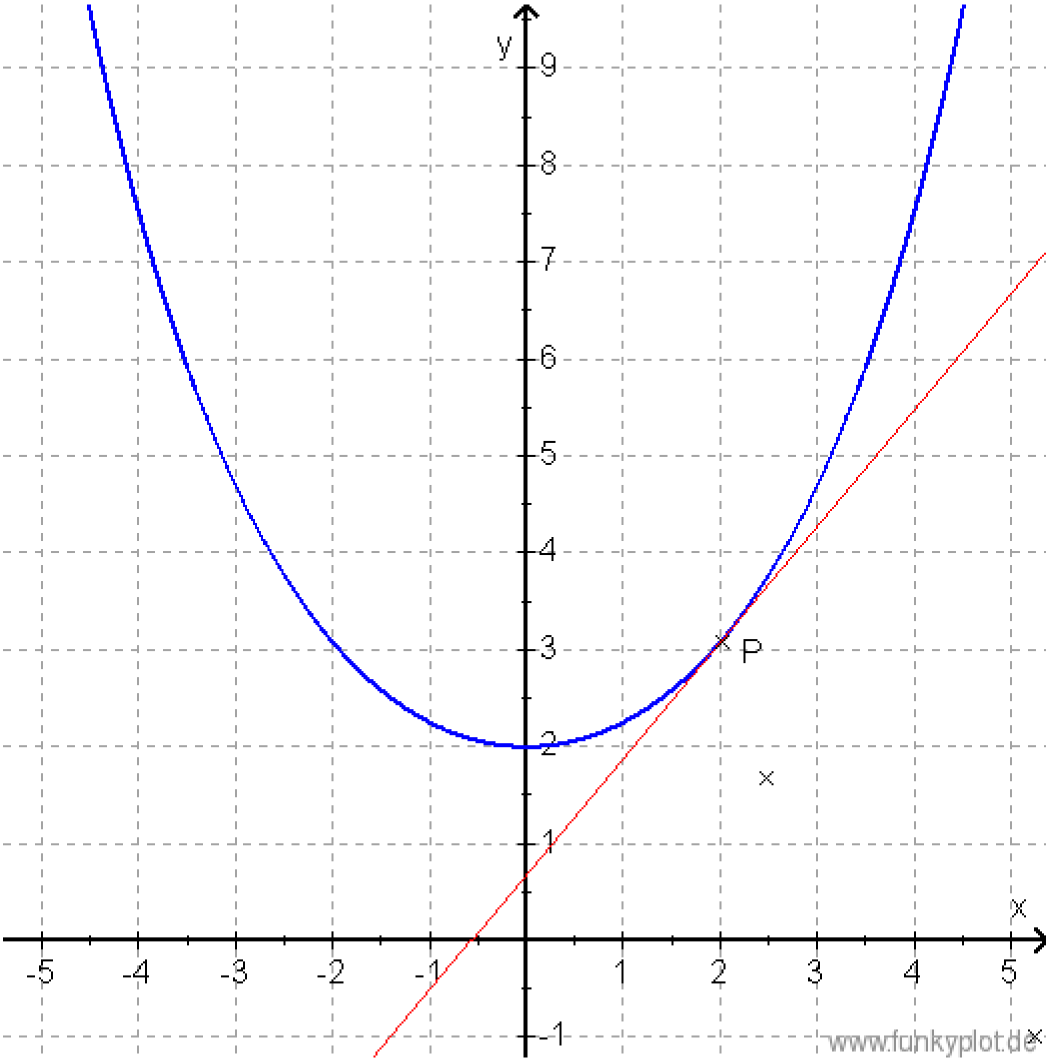
$f''(0) = 0{,}5 > 0$ => Tiefpunkt: T(0|2)

e) Skript Kurvendiskussion 6.

$f'(2) = \frac{1}{2}e^{\frac{1}{2}\cdot 2} - \frac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}\cdot 2} = \frac{1}{2}e^{1} - \frac{1}{2}e^{-1} \approx 1{,}2$

$f(2) = e^{\frac{1}{2}\cdot 2} + e^{-\frac{1}{2}\cdot 2} = e^{1} - e^{-1} \approx 3{,}08$

f) $f(4) = e^{\frac{1}{2}\cdot 4} + e^{-\frac{1}{2}\cdot 4} = e^2 - e^{-2} \approx 3{,}08$



g) $\frac{1}{4}[f(x)]^2 - [f'(x)]^2 = \frac{1}{4}\left[e^{\frac{1}{2}x} + e^{-\frac{1}{2}x}\right]^2 - \left[\frac{1}{2}e^{\frac{1}{2}x} - \frac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}x}\right]^2 =$

$= = \frac{1}{4}\left[\left(e^{\frac{1}{2}x}\right)^2 + 2\cdot e^{\frac{1}{2}x}\cdot e^{-\frac{1}{2}x} + \left(e^{-\frac{1}{2}x}\right)^2\right] - \left[\left(\frac{1}{2}e^{\frac{1}{2}x}\right)^2 - 2\cdot\frac{1}{2}e^{\frac{1}{2}x}\cdot\frac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}x} + \left(\frac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}x}\right)^2\right] =$

$= \frac{1}{4}\left[e^x + 2\cdot e^0 + e^{-x}\right] - \left[\frac{1}{4}e^x - \frac{1}{2}e^0 + \frac{1}{4}e^{-x}\right] = \left[\frac{1}{4}e^x + \frac{1}{2}\cdot 1 + \frac{1}{4}e^{-x}\right] - \left[\frac{1}{4}e^x - \frac{1}{2}\cdot 1 + \frac{1}{4}e^{-x}\right] =$

$= \frac{1}{4}e^x + \frac{1}{2}\cdot 1 + \frac{1}{4}e^{-x} - \frac{1}{4}e^x + \frac{1}{2}\cdot 1 - \frac{1}{4}e^{-x} = \frac{1}{2}\cdot 1 + \frac{1}{2}\cdot 1 = 1$

h) $L_{a;b} = \int_a^b \sqrt{1+[f'(x)]^2}\,dx$

$L_{0;b} = \int_0^b \sqrt{\left(\frac{1}{4}[f(x)]^2 - [f'(x)]^2\right) + [f'(x)]^2}\,dx = \int_0^b \sqrt{\frac{1}{4}[f(x)]^2}\,dx = \int_0^b \frac{1}{2} f(x)dx =$

$= \frac{1}{2}\left[2e^{\frac{1}{2}x} - 2e^{-\frac{1}{2}x}\right]_0^b = e^{\frac{1}{2}b} - e^{-\frac{1}{2}b} - (e^{\frac{1}{2}\cdot 0} - e^{-\frac{1}{2}\cdot 0}) = e^{\frac{1}{2}b} - e^{-\frac{1}{2}b} - (1-1) = e^{\frac{1}{2}b} - e^{-\frac{1}{2}b}$

2. a) Zu berechnen ist die Differenz der y-Werte der Punkte M_1 (oder M_2) und T(0|2) (vgl. 1.d)), wobei M_1 bzw. M_2 die Befestigungspukte über F_1 bzw. F_2 sind

Für M_2: y = $f(4) = e^{\frac{1}{2}\cdot 4} + e^{-\frac{1}{2}\cdot 4} = e^2 + e^{-2}$

Durchhang: $d = e^2 + e^{-2} - 2 \approx 5{,}52$ (m)

b) **Winkel** Skript Kurvendiskussion 6.

Neigungswinkel β des Seils über 1. Ableitung (gesuchter Winkel α ist aber nicht zwischen waagrechter Linie und Seil, sondern vertikaler Linie, also 90° – β)

tan β = f'(4) = $\frac{1}{2}e^{\frac{1}{2}\cdot 4} - \frac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}\cdot 4} = \frac{1}{2}e^2 - \frac{1}{2}e^{-2} \approx 3{,}63$ => $\beta \approx 74{,}59°$ => $\alpha \approx 15{,}41°$

Kurvenlänge:

Es gilt: $L_{0;b} = e^{\frac{1}{2}b} - e^{-\frac{1}{2}b}$. Wegen der Symmetrie des Seils muss die Länge $L_{0;4}$ verdoppelt werden.

$L = 2\cdot L_{0;4} == 2\cdot\left(e^{\frac{1}{2}\cdot 4} - e^{-\frac{1}{2}\cdot 4}\right) = 2\cdot\left(e^2 - e^{-2}\right) \approx 14{,}51$ (m)

c) Entweder mit Scheitelpunktsform: $y = a(x - x_s)^2 + y_s$

$y = a(x - 0)^2 + 2$ $\qquad$ $y = ax^2 + 2$

a bestimmen durch einsetzen des Punkts $M_2\left(4 \middle| e^2 + e^{-2}\right)$ (aus 2.a))

$e^2 + e^{-2} = a\cdot 4^2 + 2$

$e^2 + e^{-2} - 2 = a\cdot 16$

$a = \frac{1}{16}\left(e^2 + e^{-2} - 2\right)$

Also $q(x) = \frac{1}{16}\left(e^2 + e^{-2} - 2\right)x^2 + 2$

Oder allgemein: Modellieren Skript §15

$f(x) = ax^2 + bx + c$ $\qquad$ $f'(x) = 2ax + b$

I.	$f(0) = 2$	=>	$a \cdot 0^2 + b \cdot 0 + c = 2$	=>	$c = 2$
II.	$f'(0) = 0$	=>	$2a \cdot 0^2 + b = 0$	=>	$b = 0$
III.	$f(4) = e^2 + e^{-2}$	=>	$a \cdot 4^2 + 2 = e^2 + e^{-2}$	=>	$a = \frac{1}{16}\left(e^2 + e^{-2} - 2\right)$ (s. oben!)

Also $q(x) = \frac{1}{16}\left(e^2 + e^{-2} - 2\right)x^2 + 2$

d) ▶ Man bildet die Differenzfunktion d mit $d(x) = q(x) - f(x)$ und deren Ableitungen $d'(x)$ sowie $d''(x)$.

▶ Dann bestimmt man die Maximalstelle, indem man $d'(x) = 0$ nach x auflöst, auf Maximum prüft, indem man z.B. den x-Wert in $d''(x)$ einsetzt und einen negativen Wert erhält.

▶ Zuletzt setzt man den x-Wert in $d(x)$ ein und erhält damit den gesuchten Wert.