Teil A

1. a) $d(A;B) = \overline{AB} = \left|\overrightarrow{AB}\right| = \left|\begin{pmatrix} 2-0 \\ 5-1 \\ 6-2 \end{pmatrix}\right| = \left|\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix}\right| = \sqrt{2^2+4^2+4^2} = \sqrt{36} = 6$

Grundsätzlich ist die etwas umständliche Lösung denkbar:

- Aufstellen der Gleichung der Gerade AB;
- Aufstellen der Gleichung der Kugel um A mit Radius 12
- Einsetzen der Gerade (Vektor $\vec{X}$ in Kugelgleichung ersetzen durch $\vec{A} + \lambda\vec{u}$)
- Auflösen nach λ (2 Lösungen)
- Einsetzen von λ in die Geradengleichung

Einfacher: „Gehen auf bekannten Wegen": Von A zu B sind es 6 LE, also liegen C und D in derselben Richtung (zwei Orientierungen) und der doppelten Entfernung wie B von A entfernt. Man muss also den doppelten Verbindungsvektor addieren oder subtrahieren. Die Koordinaten von C können auch die von D sein und umgekehrt.

$\vec{C} = \vec{A} + 2\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 9 \\ 10 \end{pmatrix}$ => C(4|9|10)

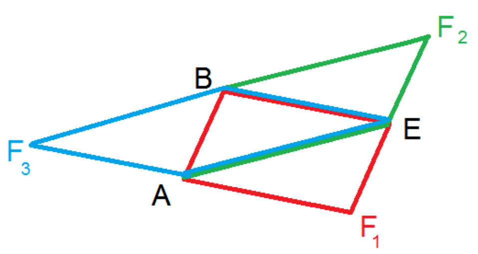
$\vec{D} = \vec{A} - 2\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ -7 \\ -6 \end{pmatrix}$ => D(–4|–7|–6)

b) Im neben stehenden Bild sind drei Möglichkeiten für den Punkt F zu sehen. Man „geht wieder auf bekannten Wegen" wie bei a) und erreicht so den Punkt F.

$\vec{F_1} = \vec{A} + \overrightarrow{BE} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1-2 \\ 2-5 \\ 5-6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ $F_1(-1|-2|1)$

$\vec{F_2} = \vec{B} + \overrightarrow{AE} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1-0 \\ 2-1 \\ 5-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 9 \end{pmatrix}$ $F_2(3|6|9)$

$\vec{F_3} = \vec{A} + \overrightarrow{EB} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2-1 \\ 5-2 \\ 6-5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$ $F_3(1|4|3)$



2. a) Das Volumen errechnet sich aus der Anzahl der Würfel mal 1VE.

Oberste Reihe:	1	(Würfel)
Zweite Reihe:	$3^2 = 9$	(Würfel)
Dritte Reihe:	$5^2 = 25$	(Würfel)

Also: V = 35 VE

h = 3,5 LE

b) Mehrere Möglichkeiten: Am einfachsten wählt man B oder S als Ursprung, gewohnheitsmäßig auch A. Die Grundfläche ist ein Quadrat mit der Seitenlänge 7. Somit ergeben sich die Koordinaten der Punkte B und S je nach Ursprung:

Ursprung A:	B(0|7|0)	S(–3,5|3,5|3,5)
Ursprung B:	B(0|0|0)	S(–3,5|–3,5|3,5)
Ursprung S:	B(–3,5|3,5|–3,5)	S(0|0|0)

Mit $\vec{X} = \vec{B} + \lambda\overrightarrow{BS}$ berechnet man die Geradengleichung abhängig von obigen Koordinaten:

z.B. mit Ursprung A: $\vec{X} = \vec{B} + \lambda\overrightarrow{BS} = \begin{pmatrix} 0 \\ 7 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -3,5-0 \\ 3,5-7 \\ 3,5-0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 7 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -3,5 \\ 3,5 \\ 3,5 \end{pmatrix}$

Also: g: $\vec{X} = \begin{pmatrix} 0 \\ 7 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Teil B

a) Auch hier „geht man wieder auf bekannten Wegen“ wie bei Teil 1. Von A 2mal den Weg AM und erreicht so den Punkt C.

$$\vec{C} = \vec{A} + 2 \cdot \overrightarrow{AM} = \begin{pmatrix} 5 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} 2,5-5 \\ 0 \ +4 \\ 2 \ -0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Normalenform Skript §10 Punkte 2. und 3.

Für die Ebene benötigt man die Vektoren $\overrightarrow{AM}$ und $\overrightarrow{AB}$, um den Normalenvektor zu bestimmen:

$$\overrightarrow{AM} = \begin{pmatrix} 2,5-5 \\ 0 \ +4 \\ 2 \ -0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2,5 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad \vec{u} = \begin{pmatrix} -5 \\ 8 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 5-5 \\ 4+4 \\ 0-0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 8 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \vec{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Also: $\vec{u} \times \vec{v} = \begin{pmatrix} -5 \\ 8 \\ 4 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ -5 \end{pmatrix} \qquad \vec{n} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} \circ \left(\vec{X} - \begin{pmatrix} 5 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix} \right) = 0$$

E: $4x_1 + 5x_3 - 20 = 0$

b) **Problem:** Winkel zwischen zwei Ebenen Skript §12 (Hier: Ebene E und x_1x_2-Ebene des Koordinatensystems mit der Gleichung $x_3 = 0$)

$$\overrightarrow{n_1} = \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ -5 \end{pmatrix} \qquad \overrightarrow{n_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\sin\alpha = \frac{\begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}{\sqrt{16+0+25} \cdot \sqrt{1}} = \frac{5}{\sqrt{41} \cdot \sqrt{1}} \approx 0,781 \Rightarrow \alpha = 51,34°$$ Also gilt: $\varphi = 38,66°$

c) „Senkrecht zur Grundplatte“ heißt „parallel zum Normalenvektor der Ebene E“.

S (4,5 | 0 | 4,5)

$\overrightarrow{MS} = \begin{pmatrix} 2,5-4,5 \\ 0 \; - \; 0 \\ 2 \; -4,5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ -2,5 \end{pmatrix} = 0,5 \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ -5 \end{pmatrix} = 0,5 \cdot \vec{n}$ Also sind die beiden Vektoren linear abhängig und somit parallel.

Länge: $\left|\overrightarrow{MS}\right| = \left|\begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ -2,5 \end{pmatrix}\right| = \sqrt{4+6,25} = \sqrt{10,25} = \frac{\sqrt{41}}{2} \approx 3,20$ Damit ist der Polstab 32 cm lang (1LE entspricht ja 10 cm)

d) Zunächst muss die Gleichung einer Gerade g mit dem angegebenen Richtungsvektor durch die Spitze des Polstabs aufgestellt werden:

$$g: \vec{X} = \vec{S} + \lambda \cdot \vec{u} = \begin{pmatrix} 4,5 \\ 0 \\ 4,5 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ 6 \\ -13 \end{pmatrix}$$

Diese Gerade schneidet man mit der Ebene E, um den Punkt S‘ herauszubekommen, an dem der Schatten von S auf der Ebene entstehen würde.

g in E: $4\cdot(4,5 + 6\lambda) + 5(4,5 - 13\lambda) - 20 = 0$

$18 + 24\lambda + 22,5 - 65\lambda - 20 = 0$

$-41\lambda + 20,5 = 0$

$\lambda = 0,5$

λ in $g: \vec{S'} = \begin{pmatrix} 4,5 \\ 0 \\ 4,5 \end{pmatrix} + 0,5 \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ 6 \\ -13 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7,5 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}$

Man erkennt, dass die x_3–Koordinate negativ ist. Da das gesamte Rechteck nicht im negativen x_3-Bereich ist, liegt S‘ außerhalb.

e) Betrachtet man die Abbildung, so stellt man fest, dass die Verbindungslinien von M zu den entsprechenden Mittelpunkten der Seiten parallel zur x_2–Achse (6 Uhr und 18 Uhr) bzw. x_1–Achse (12 Uhr auf der x_1-Achse) verlaufen. Damit erkennt man, dass alle Zeiten vor 12 Uhr rechts von der x_1x_3-Ebene angezeigt werden, also einen positiven x_2–Wert haben. Da S‘ ebenso eine positive x_2–Koordinate hat, liegt t_0 vor 12 Uhr.