Teil A

1. a) $d(A;B) = \overline{AB} = \left|\overrightarrow{AB}\right| = \left|\begin{pmatrix} 2-0 \\ 5-1 \\ 6-2 \end{pmatrix}\right| = \left|\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix}\right| = \sqrt{2^2+4^2+4^2} = \sqrt{36} = 6$

Grundsätzlich ist die etwas umständliche Lösung denkbar:

- Aufstellen der Gleichung der Gerade AB;
- Aufstellen der Gleichung der Kugel um A mit Radius 12
- Einsetzen der Gerade (Vektor $\vec{X}$ in Kugelgleichung ersetzen durch $\vec{A}+\lambda\vec{u}$)
- Auflösen nach λ (2 Lösungen)
- Einsetzen von λ in die Geradengleichung

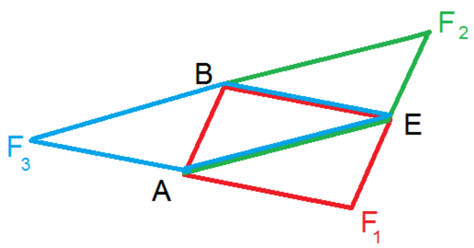
Einfacher: „Gehen auf bekannten Wegen“: Von A zu B sind es 6 LE, also liegen C und D in derselben Richtung (zwei Orientierungen) und der doppelten Entfernung wie B von A entfernt. Man muss also den doppelten Verbindungsvektor addieren oder subtrahieren. Die Koordinaten von C können auch die von D sein und umgekehrt.

$$\vec{C} = \vec{A} + 2\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 9 \\ 10 \end{pmatrix} \Rightarrow C(4|9|10)$$

$$\vec{D} = \vec{A} - 2\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ -7 \\ -6 \end{pmatrix} \Rightarrow D(-4|-7|-6)$$

b) Im neben stehenden Bild sind drei Möglichkeiten für den Punkt F zu sehen. Man „geht wieder auf bekannten Wegen“ wie bei a) und erreicht so den Punkt F.

$$\vec{F_1} = \vec{A} + \overrightarrow{BE} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1-2 \\ 2-5 \\ 5-6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad F_1(-1|-2|1)$$



$$\vec{F_2} = \vec{B} + \overrightarrow{AE} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1-0 \\ 2-1 \\ 5-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 9 \end{pmatrix} \quad F_2(3|6|9)$$

$$\vec{F_3} = \vec{A} + \overrightarrow{EB} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2-1 \\ 5-2 \\ 6-5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} \quad F_3(1|4|3)$$

2. Betrachtet wird die Pyramide ABCDS mit A (0 | 0 | 0), B (4 | 4 | 2), C (8 | 0 | 2), D (4 | –4 | 0) und S (1 | 1 | –4). Die Grundfläche ABCD ist ein Parallelogramm.

   a) Skript §13 Punkt 2

   Da bereits vorausgesetzt ist, dass das Viereck ein Parallelogramm ist, muss man nur noch den rechten Winkel bei A (hier: Ursprung) nachweisen:

$$\overrightarrow{AB} \circ \overrightarrow{AD} = \vec{B} \circ \vec{D} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 4 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix} = 16 - 16 + 0 = 0 \quad \Rightarrow \quad \overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{AD} \quad \Rightarrow \text{Rechteck}$$

   b) Da die Kante [AS] senkrecht auf der Grundfläche ABCD steht, ist sie Höhe der Pyramide.

$$h = \left|\overrightarrow{AS}\right| = \left|\vec{S}\right| = \left|\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix}\right| = \sqrt{1^2 + 1^2 + (-4)^2} = \sqrt{18}$$

$$V = \frac{1}{3} \cdot G \cdot h = \frac{1}{3} \cdot 24\sqrt{2}\sqrt{18} = 48$$

Teil B

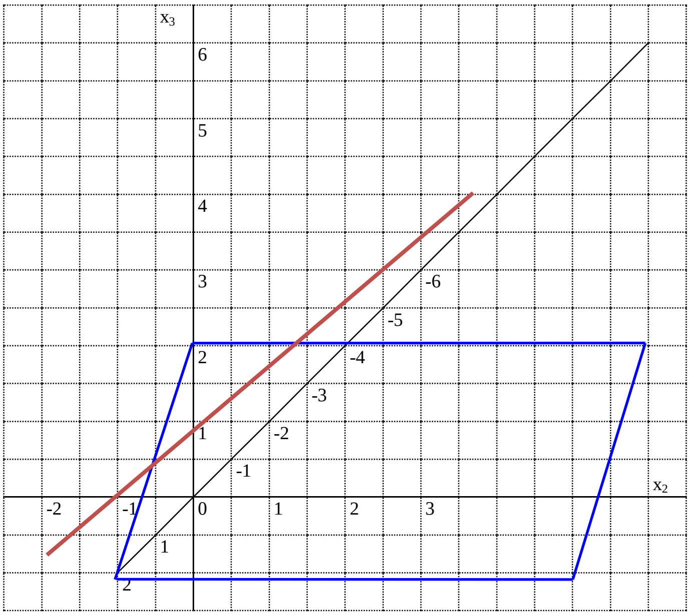
a) Die Ebene E ist parallel zur x_2-Achse.

SP mit x_1-Achse: Ansatz: $x_2 = 0$ und $x_3 = 0$ in E: $x_1 = 2$ => $S_1(2|0|0)$

SP mit x_3-Achse: Ansatz: $x_1 = 0$ und $x_2 = 0$ in E: $x_3 = 2$ => $S_2(0|0|2)$

Zur Zeichnung der Gerade kann man einen Punkt A‘ bestimmen, indem man z.B. $\lambda = -1$ einsetzt (so fällt die Wurzel weg)

$$\overrightarrow{A'} = \begin{pmatrix} 0 \\ \sqrt{2} \\ 2 \end{pmatrix} - 1 \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ \sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} +1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$



b) Winkel zwischen Ebene und Gerade Skript §12

Ebene: x_1x_2-Ebene mit Normalenvektor: $\vec{n} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Gerade: Richtungsvektor: $\vec{v} = \begin{pmatrix} -1 \\ \sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix}$

$$\sin\alpha = \frac{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} -1 \\ \sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix}}{\sqrt{1} \cdot \sqrt{1+2+1}} = \frac{0+0+1}{\sqrt{1} \cdot \sqrt{4}} = \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad \alpha = 30°$$

c) **Problem:** Gegenseitige Lage Punkt-Gerade Skript §11 Punkt 2

g: $\vec{X} = \begin{pmatrix} 0 \\ \sqrt{2} \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ \sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix}$ $M(0 \mid 3\sqrt{2} \mid 2)$

① $\vec{n} = \begin{pmatrix} -1 \\ \sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad H: \begin{pmatrix} -1 \\ \sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix} \circ \left[\vec{X} - \begin{pmatrix} 0 \\ 3\sqrt{2} \\ 2 \end{pmatrix} \right] = 0$

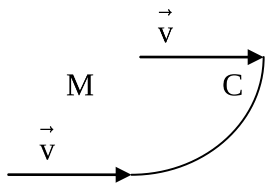
H: $-x_1 + \sqrt{2}x_2 + x_3 - 8 = 0$ (NF)

② g in H: $-(0-\lambda) + \sqrt{2} \cdot \left(\sqrt{2} + \lambda\sqrt{2}\right) + (2+\lambda) - 8 = 0 \quad \Rightarrow 4\lambda - 4 = 0 \Rightarrow \lambda = 1$

λ in g: $\vec{B} = \begin{pmatrix} 0 \\ \sqrt{2} \\ 2 \end{pmatrix} + 1 \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ \sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2\sqrt{2} \\ 3 \end{pmatrix} \Rightarrow \quad B(-1 \mid 2\sqrt{2} \mid 3)$

③ $r = d(F;g) = \left|\overrightarrow{BM}\right| = \left|\begin{pmatrix} 0+1 \\ 3\sqrt{2} - 2\sqrt{2} \\ 2-3 \end{pmatrix}\right| = \left|\begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \\ -1 \end{pmatrix}\right| = \sqrt{4} = 2$

d) Die Länge von $\vec{v}$ ist so groß wie der Radius. Somit muss der Vektor $\vec{v}$ zum Ortsvektor von M addiert werden. (S. Skizze!)



e) Streckenlänge: $\overline{AB} = \left|\overrightarrow{BA}\right| = \left|\begin{pmatrix} 0+1 \\ \sqrt{2} - 2\sqrt{2} \\ 2-3 \end{pmatrix}\right| = \left|\begin{pmatrix} 1 \\ -\sqrt{2} \\ -1 \end{pmatrix}\right| = \sqrt{4} = 2$ entspricht 20m

Viertelkreis (Kreisbogen): $b = \frac{1}{4} \cdot u = \frac{1}{4} \cdot 2\pi \cdot r = \frac{1}{4} \cdot 2\pi \cdot 2 = \pi$ entspricht 10π m

Also gilt für die Zeit: (20m + 10 π m):15m/s $\approx$ 3,4 s