Teil A

1. a) **Definitionsmenge** BWL Skript Kurvendiskussion 1.

L: $2x + 3 > 0$

$x > -1{,}5$ $D =]-1{,}5; +\infty[$

Wertemenge:

Da es sich beim gegebenen Term um eine ln-Funktion handelt, ist die Wertemenge:

$W = \mathbb{R}$

b) **Schnittpunkt mit x-Achse** Skript Kurvendiskussion 2.

$\ln(2x + 3) = 0 \Rightarrow 2x + 3 = 1 \Rightarrow x = -1 \Rightarrow N(-1|0)$

Tangente Skript Kurvendiskussion 6.

$$f'(x) = \frac{2}{2x+3}$$

$x_o = -1$ $f(x_o) = 0$ $f'(x_o) = \frac{2}{2\cdot(-1)+3} = 2$

z.B. in y = mx + t einsetzen (mit $y = f(x_o)$ und $m = f'(x_o)$)

$0 = 2\cdot(-1) + t \Rightarrow t = 2$

Tangente: t: $y = 2x + 2$

2. a) Wendepunkt Skript Kurvendiskussion 8.

$f'(x) = 3x^2 - 12x + 11 \Rightarrow f''(x) = 6x - 12$

$f''(x) = 0 \Rightarrow x = 2$ $f(1) = 2^3 - 6\cdot2^2 + 11\cdot2 - 6 = 0$

f'' hat VZW bei x = 2 => Wendepunkt W(2|0)

W in Gerade: 0 = 2 – 2 (w) => W liegt auf der Geraden.

b) Graph wird also im 1 nach rechts und 2 nach oben verschoben:

$y = (x - 1)^3 - (x - 1)^2 + 11(x - 1) - 6 + 2$

$y = (x - 1)^3 - (x - 1)^2 + 11(x - 1) - 4$

3. a) Definitionsmenge BWL Skript Kurvendiskussion 1.

Intervall ist bei 5 abgeschlossen. Dies ist bei Wurzelfunktionen der Fall. Also z.B.

$f(x) = \sqrt{5-x}$

b) Rationale Funktionen Skript §02

- Nullstelle x = 2 heißt: Im Zähler Faktor (x – 2)
- Polstelle x = –3 heißt: Im Nenner Faktor (x + 3)
- Gerade mit Gleichung y = 1 ist horizontale Asymptote, d.h. Zählergrad und Nennergrad sind gleich und die Leitkoeffizienten sind gleich, also z.B. beide 1

Also: $k(x) = \frac{x-2}{x+3}$

4. Produktregel Skript §05 | Kettenregel Skript §11

$f'(x) = 1 \cdot e^{ax} + x \cdot a\, e^{ax}$

$0 = 1 \cdot e^{a \cdot 2} + 2 \cdot a\, e^{a \cdot 2}$

$0 = e^{2a} + 2a\, e^{2a}$

$0 = e^{2a} \cdot (1 + 2a)$

Faktorweise Null setzen (1. Faktor ist aber größer 0)

$1 + 2a = 0 \Rightarrow a = -0{,}5$

Teil B

1. a) Modellieren Skript §15

Bedingungen:

I. $f(1) = -1$ Im Punkt W(1|–1)

II. $f''(1) = 0$ Wendepunkt | außerdem: $f'''(1) \neq 0$

Man benötigt also die ersten beiden Ableitungen:

$f'(x) = 4ax^3 + 3bx^2$

$f''(x) = 12ax^2 + 6bx$

Damit:

$$\begin{array}{llll} \text{I.} & a \cdot 1^4 + b \cdot 1^3 = -1 & & a + b = -1 \\ \text{II.} & 12a \cdot 1^2 + 6b \cdot 1 = 0 & & \underline{12a - 6b = 0} \\ & & 6\text{I} - \text{II} & -6a = -6 \quad \Rightarrow a = +1 \\ & & a \text{ in I:} & 1 + b = -1 \quad \Rightarrow b = -2 \end{array}$$

Also: $f(x) = x^4 - 2 \cdot x^3$

b) **Extrempunkte** Skript Kurvendiskussion 7.

$f'(x) = 4x^3 - 6x^2$

$f''(x) = 12x^2 - 12x$

$f'(x) = 0$

$4x^3 - 6x^2 = 0 \quad \Rightarrow x^2(4x - 6) = 0$

$x1 = 0$ Hier kein Extrempunkt, sondern nach Angabe Wendepunkt W

$4x - 6 = 0 \quad \Rightarrow \quad x_2 = 1{,}5 \qquad y_2 = 1{,}5^4 - 2 \cdot 1{,}5^3 = -1{,}6875$

Art des Extrempunkts über 2. Ableitung Skript Kurvendiskussion 10.

$f''(1{,}5) = 12 \cdot 1{,}5^2 - 12 \cdot 1{,}5 > 0$

Ergebnis: Tiefpunkt: T(1,5|–1,6875)

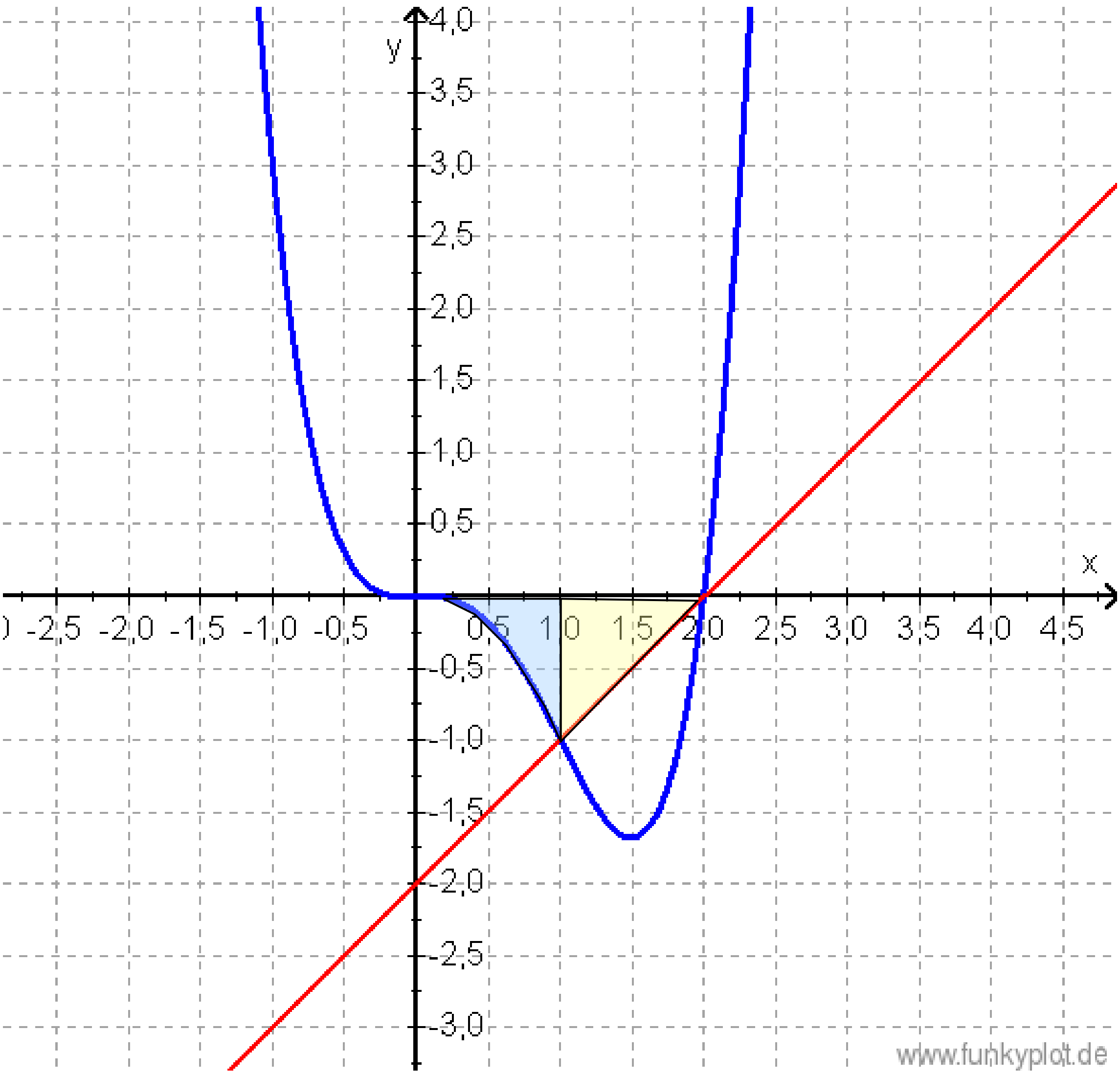
c) **Geradengleichung**

Beide Punkte (W(1|–1) und P(2|0)) in die Gleichung y = mx+t einsetzen und m sowie t ermitteln:

$$\begin{array}{lll} \textbf{W:} & & -1 = m \cdot 1 + t \\ \textbf{P:} & & \underline{0 = m \cdot 2 + t} \\ & \text{II–I} & 1 = m \\ & \text{in II} & 0 = 2 + t \quad \Rightarrow \quad t = -2 \end{array}$$

g: y = x – 2

Graph



d) **Flächenberechnung** Skript §20

Der Graph verläuft zwischen x = 0 und x = 2 im IV. Quadranten

$$A=\left|\int_0^2 f(x)dx\right|=\left|\left[\frac{1}{5}x^5-2\cdot\frac{1}{4}x^4\right]_0^2\right|=\left|\left[\frac{1}{5}x^5-\frac{1}{2}x^4\right]_0^2\right|=\left|\frac{1}{5}\cdot 2^5-\frac{1}{2}\cdot 2^4-0\right|=\left|-1{,}6\right|=1{,}6$$

Fläche zwischen 2 Graphen: Skript §21|2.

Einfacher aber: Berechnung der gelben Dreiecksfläche (Rechtwinkliges Dreieck mit Grundlinie 1 und Höhe 1 – vgl. Koordinaten von P und W) und der blauen Fläche als Integral (Die Summe der beiden ist die eine der beiden gesuchten Teilflächen A_1. Die andere A_2 ergibt sich als Differenz aus $A - A_1$):

$$A_{Dreieck}=\frac{1}{2}\cdot 1\cdot 1=\frac{1}{2}=0{,}5$$

$$A_{Blau}=\left|\int_0^1 f(x)dx\right|=\left|\left[\frac{1}{5}x^5-\frac{1}{2}x^4\right]_0^1\right|=\left|\frac{1}{5}\cdot 1^5-\frac{1}{2}\cdot 1^4-0\right|=\left|-0{,}3\right|=0{,}3$$

$A_1 = 0{,}5 + 0{,}3 = 0{,}8$ $\qquad$ $A_2 = A - A_1 = 1{,}6 - 0{,}8 = 0{,}8$

Also ergibt sich für das Verhältnis: $A_1 : A_2 = 1:1$

2. a) Es gilt für die Funktionsterme und die Graphen:

$f_0(x) = x^4 - 2$		Achsensymm. zu y-Achse | genau 2 Nullstellen $\pm\sqrt[4]{2}$
$f_1(x) = x^4 - 2x^2 = x^2(x^2 - 2)$		Achsensymm. zu y-Achse | genau 3 Nullstellen 0; $\pm\sqrt{2}$
$f_2(x) = x^4 - 2x^3$	$= x^3(x - 2)$	Keine Symm. zum KS| genau 2 Nullstellen 0; 2
$f_4(x) = x^4 - 2x^4$	$= -x^4$	Potenzfunktion; Graph an der x-Achse gespiegelt | einzige Nullstelle ist 0

Damit ergibt sich:

$f_0(x) = x^4 - 2$		Abbildung 4
$f_1(x) = x^4 - 2x^2 = x^2(x^2 - 2)$		Abbildung 1
$f_2(x) = x^4 - 2x^3$	$= x^3(x - 2)$	Abbildung 3
$f_4(x) = x^4 - 2x^4$		Abbildung 2

b) Somit wird x^n die höchste Potenz und –2 der Leitkoeffizient

n ungerade: für $x \to +\infty$ gilt f(x) $x \to -\infty$

für $x \to -\infty$ gilt f(x) $x \to +\infty$

n gerade: für $x \to +\infty$ gilt f(x) $x \to -\infty$

für $x \to -\infty$ gilt f(x) $x \to -\infty$

3. a) $g(1.5) = -\frac{\pi}{8}\sin\left(\frac{\pi}{2}\cdot 1{,}5\right) = -\frac{\pi}{8}\sin\left(0{,}75\pi\right) = -\frac{\pi}{8}\frac{\sqrt{2}}{2} = -\frac{\sqrt{2}}{16}\pi$

Negatives VZ heißt: Ausatmen

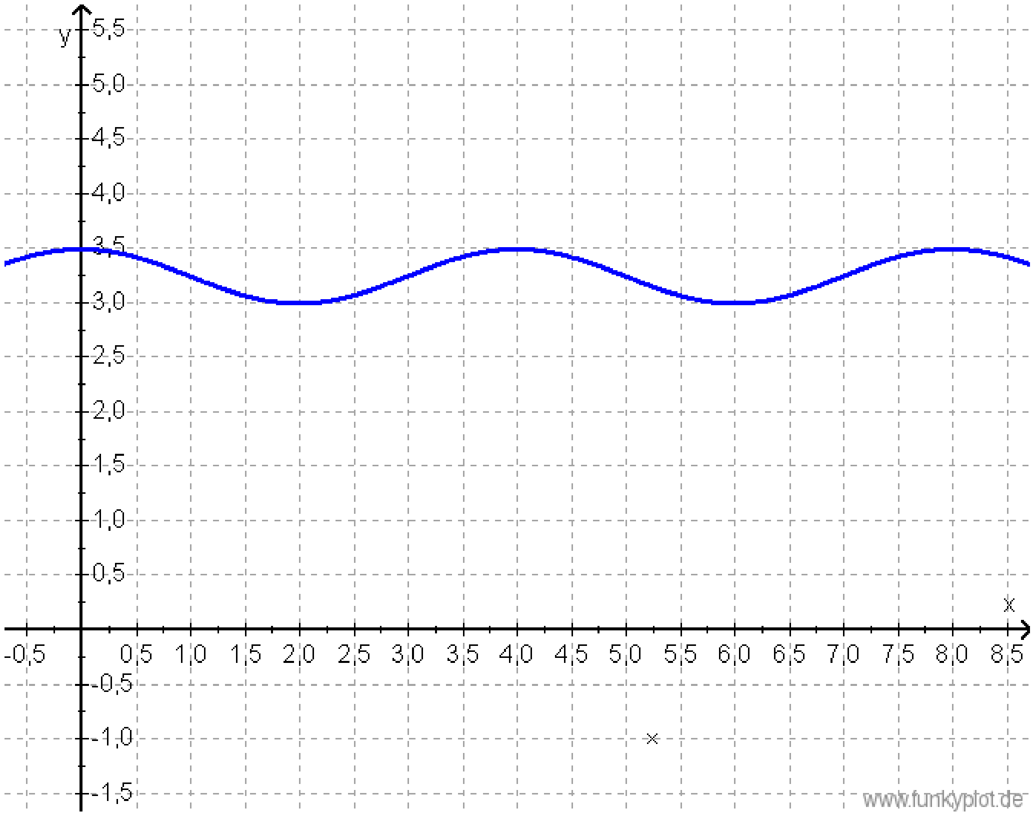
b) Nach dem Ausatmen (Graph im negativen Bereich) ist das Luftvolumen minimal. Also z.B. zum Zeitpunkt t = 2.

c) $\int_2^4 h(t)dt = \int_2^4 -\frac{\pi}{8}\sin\left(\frac{\pi}{2}t\right) = \left[\frac{\pi}{8}\frac{2}{\pi}\cos\left(\frac{\pi}{2}t\right)\right]_2^4 = \left[\frac{1}{4}\cos\left(\frac{\pi}{2}t\right)\right]_2^4 =$

$= \frac{1}{4}\left[\cos 2\pi - \cos\pi\right] = \frac{1}{4}\left[1-(-1)\right] = 0{,}5$

Das ist das gesamte in der Lunge befindliche Luftvolumen (also 0,5 Liter), das während des Einatmungsvorgangs zwischen t = 2 und t = 4 aufgenommen wurde.

d)



e) 60:4 = 15. Also beträgt die Atemfrequenz der Testperson 15 (Atemzyklen pro Minute).

20% höher: Frequenz: $1{,}2 \cdot 15 = 18$ | Zeit pro Atmung: $60\text{s} : 18 = \frac{10}{3}\,\text{s}$

Also: $b = 2\pi : \frac{10}{3} = 2\pi \cdot \frac{3}{10} = \frac{3\pi}{5} = 0{,}6\,\pi$

Oder: Auch b erhöht sich um 20%: $1{,}2 \cdot \frac{\pi}{2} = 0{,}6\,\pi$