Teil A

1. a) **Definitionsmenge** BWL Skript Kurvendiskussion 1.

L: $x > 0$

$D = \mathbb{R}^+$

b) **Nullstellen** Skript Kurvendiskussion 2.

$(x^3 - 8)\cdot(2 + \ln x) = 0$

1. Faktor: $x^3 = 8$ => $x_1 = 2$

2. Faktor: $2 + \ln x = 0$ => $\ln x = -2|e^{\cdots}$ => $x_2 = e^{-2}$

2. a) Bei den Funktionen, deren Grad gerade ist (also f mit Grad 2 und h mit Grad 4 | Grad ist der höchste vorkommende Exponent bei x), müsste der Grenzwert für $x \to +\infty$ mit dem Grenzwert für $x \to -\infty$ übereinstimmen. Nur bei ungeradem Grad sind die Grenzwerte wie hier im Graphen der Abbildung 1 unterschiedlich, also wird der Graph von g dargestellt.

b) mit HDI Skript §20 $\int_0^1 h'(x)dx = [h(x)]_0^1 = h(1) - h(0) = (1^4 + 1^2 + 1) - (0^4 + 0^2 + 1) = 2$

3. a) $\sin(a\cdot\pi) = 0$ Beispiele für Nullstellen von sinx sind: $x = 0$; $x = \pi$; $x = 2\pi$….

$(a\cdot\pi) = 0$ => $a = 0$ (nicht gefragt!) $(a\cdot\pi) = \pi$ => $a = 1$

b) **Definitionsmenge** BWL Skript Kurvendiskussion 1.

W: $x^2 - b \geq 0$ $x^2 \geq b$ $|x| \geq b$

Für den vorgegebenen Bereich $\mathbb{R} \setminus]-2; 2[$ gilt: $|x| \geq 2$, also $b = 2$

c) e^x ist stets positiv, $-e^x$ demnach negativ; addiert man 4, ist $-e^x + 4$ kleiner als vier, also $W =]-\infty; 4[$

4. Newton-Verfahren Skript §07|4.

Da man als ersten Näherungswert x_1 die Nullstelle der an den Graphen im Startpunkt P (hier H oder T) gelegten Tangente herausbekommt, sind die beiden Punkte ungeeignet, da die Tangenten die x-Achse nicht schneiden können.

5. a) Wendepunkt Tangente Skript Kurvendiskussion 8.

$f'(x) = 3x^2 - 12x + 11$ => $f''(x) = 6x - 12$

$f''(x) = 0$ => $x = 2$ $f(1) = 2^3 - 6\cdot2^2 + 11\cdot2 - 6 = 0$

f‘‘ hat VZW bei $x = 2$ => Wendepunkt W(2|0)

W in Gerade: $0 = 2 - 2$ (w) => W liegt auf der Geraden.

b) Graph wird also im 1 nach rechts und 2 nach ober verschoben:

$y = (x - 1)^3 - (x - 1)^2 + 11(x - 1) - 6 + 2$

$y = (x - 1)^3 - (x - 1)^2 + 11(x - 1) - 4$

Teil B

1. a) $f(x)=\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x+3}=\frac{(x+3)-(x+1)}{(x+1)(x+3)}=\frac{x+3-x-1}{(x+1)(x+3)}=\frac{2}{(x+1)(x+3)}=\frac{2}{x^2+4x+3}=$

$$=\frac{2}{(x^2+4x+4)-4+3}=\frac{2}{(x+2)^2-1}=\frac{1}{0{,}5\cdot[(x+2)^2-1]}=\frac{1}{0{,}5\cdot(x+2)^2-0{,}5}$$

Quadratische Ergänzung 2 im Zähler oder Kehrbruch von 2 (1/2) im Nenner

1. b) **Asymptoten** Skript Kurvendiskussion 4. und Skript §02

Horizontale As.: Am Term 2 aus a) sieht man, dass der Zählergrad Null und der Nennergrad zwei ist, also Zählergrad kleiner als der Nennergrad. Damit ist die x-Achse horizontale Asymptote.

Vertikale As.: Am Term 1 aus a) erkennt man im Nenner die Faktoren (x + 1) und (x + 3). Also sind die Geraden mit den Gleichungen x = –1 und x = –3 die vertikalen Asymptoten.

SP mit y-Achse Skript Kurvendiskussion 2.

$f(0) = \frac{2}{3}$ $S_y\left(0\middle|\frac{2}{3}\right)$

c) Es gilt: $f'(x)=-\frac{p'(x)}{(p(x))^2}$ Der Nenner des Bruchs ist positiv. Wegen des Minus-Zeichens vor dem Bruch hat f'(x) stets das entgegengesetzte Vorzeichen von p'(x).

f'(x) = 0 ist gleichbedeutend mit p'(x) = 0, da p'(x) der Zähler des Bruchs ist. In Abbildung 1 erkennt man, dass der Graph von p nur einen Tiefpunkt bei x = –2 hat und so muss gelten p'(–2) = 0, wobei x = –2 die einzige Nullstelle ist.

Im Bereich]–3; –2[gilt: p'(x) < 0, da der Graph von p fällt.

Im Bereich]–2; –1[gilt: p'(x) > 0, da der Graph von p steigt.

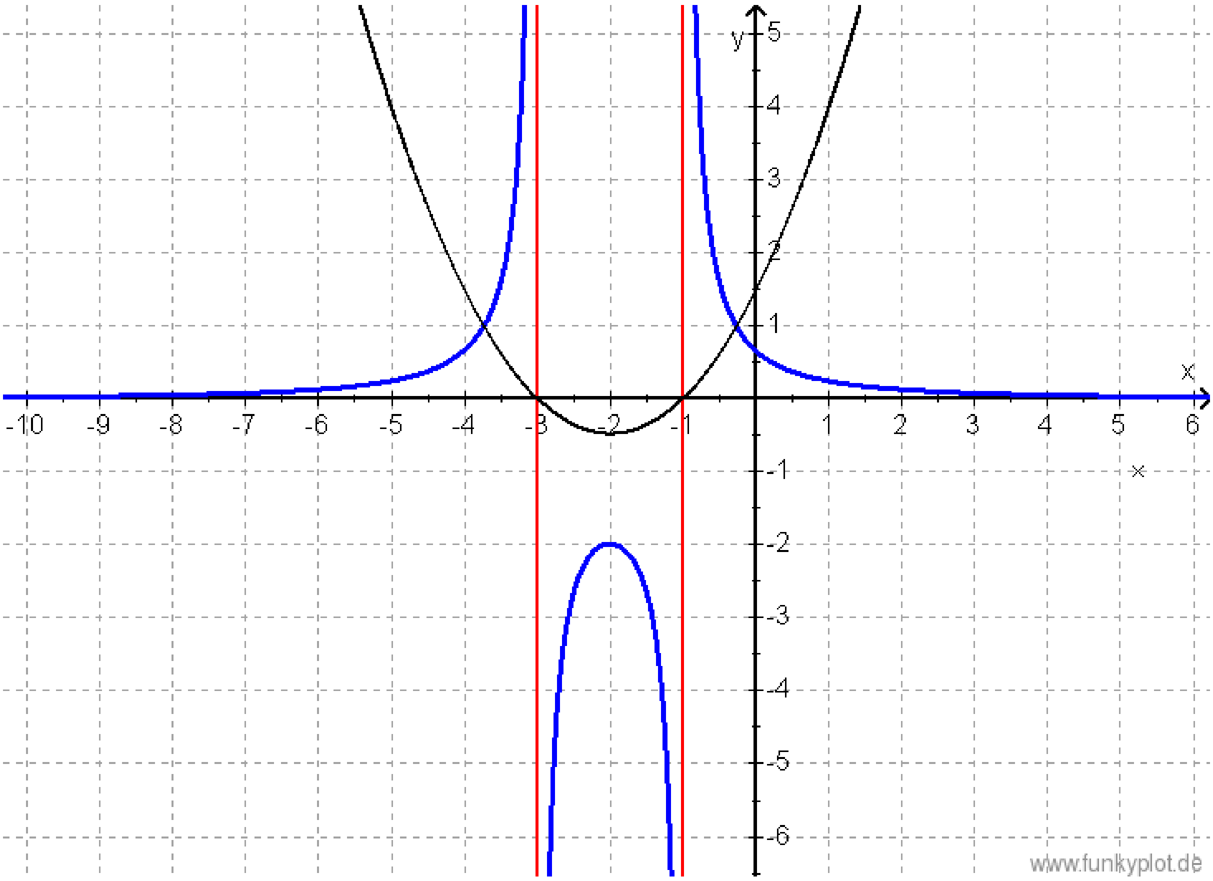
Da der Nenner des Bruchs ein Quadrat ist, ist er in den o.g. Bereichen positiv und für f' gilt das gegenteilige VZ wie für p'.

Damit steigt der Graph von f streng monoton in]–3; –2[
und fällt streng monoton in]–2; –1[; Hochpunkt: H(–2|–2)

Berechnung der y-Koordinate von H:
p(–2) = 0,5·(–2 + 2) – 0,5 = –0,5;

mit $f(x)=\frac{1}{p(x)}$ gilt: $f(-2)=\frac{1}{p(-2)}=\frac{1}{-0{,}5}=-2$

d) $f(-5) = 0{,}25$ $\qquad$ $f(-1{,}5) = -2\frac{2}{3}$



2. a) **Grenzverhalten** Skript Kurvendiskussion 4.

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{3}{\underbrace{\underbrace{e^{x+1}}_{\to+\infty}-1}_{\to+\infty}}\right)=0$$

Ableitung Quotientenregel Skript §05 | Kettenregel Skript §11

$$h(x)=\frac{3}{e^{x+1}-1}=3\left(e^{x+1}-1\right)^{-1} \qquad h'(x)=-3\left(e^{x+1}-1\right)^{-2}e^{x+1}=\frac{\overbrace{-3e^{x+1}}^{<0}}{\underbrace{\left(e^{x+1}-1\right)^2}_{>0}}<0$$

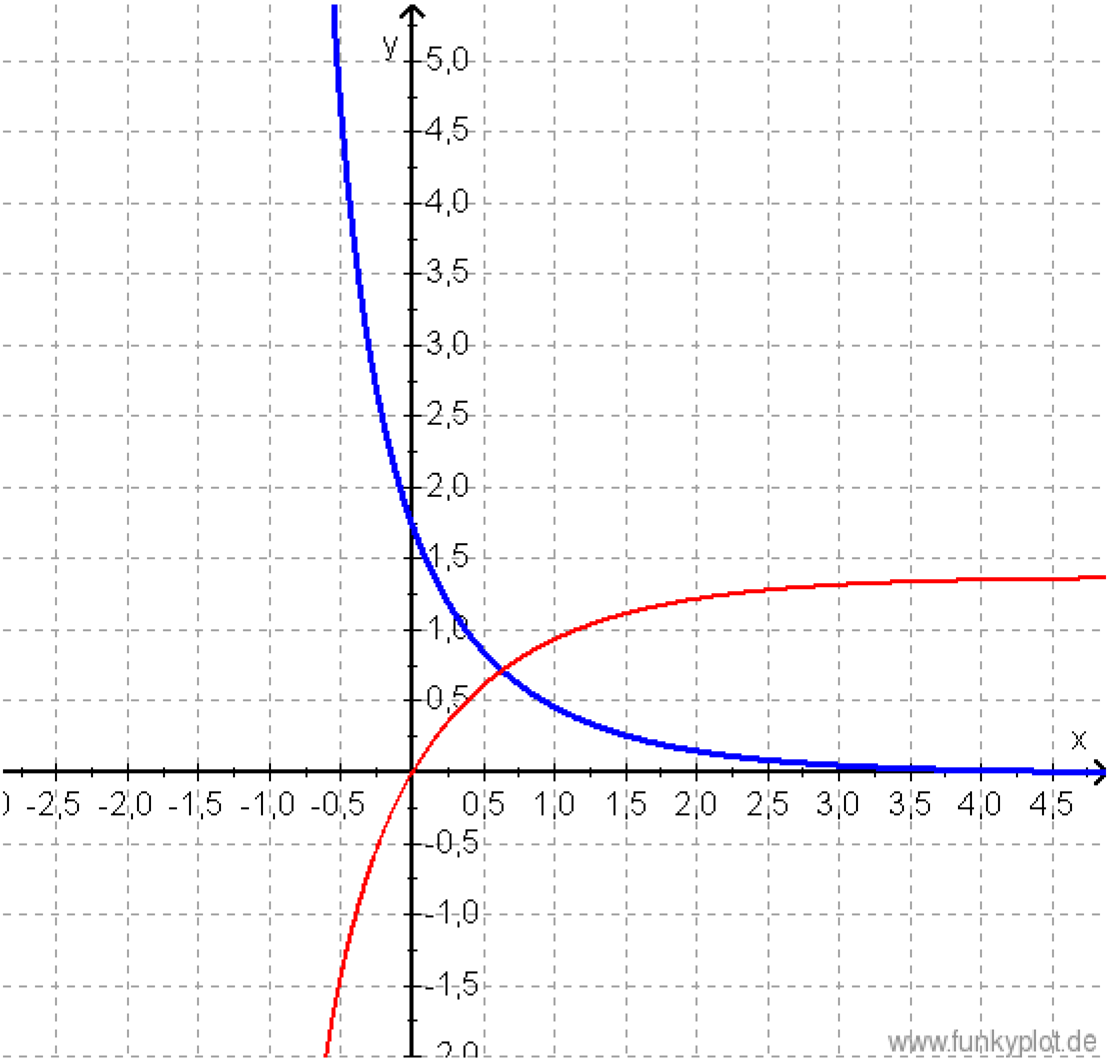
Ergebnis auch mit Quotientenregel, beachte: Ableitung des Zählers ist Null!

b) α) Da $H_0'(x) = h(x) > 0$ ist der Graph von H_0 streng monoton steigend.
β) Da $H_0''(x) = h'(x) < 0$ ist der Graph von H_0 ist rechtsgekrümmt.

c) Die Nullstelle von H_0 ist die untere Grenze, also x = 0.

Der Inhalt der Fläche zwischen Graph und x-Achse im Bereich $x \in [-0{,}5; 0]$ beträgt etwa 6 Kästchen. Da 4 Kästchen eine Flächeneinheit sind (Quadrat mit Seitenlänge 1), ist $H_0(-1{,}5) \approx -1{,}5$ (Minus, da oberhalb x-Achse von rechts nach links integriert wird.)

Der Inhalt der Fläche zwischen Graph und x-Achse im Bereich $x \in [0; 3]$ beträgt etwa 5 Kästchen. Also: $H_0(3) \approx +1{,}3$



3. a) Wert der Funktion ist 0,01; gesucht ist x

$h(x) = \frac{3}{e^{x+1}-1}$ vgl. 2)

$h(x) = 0{,}01$

$\frac{3}{e^{x+1}-1} = 0{,}01 \quad \Rightarrow \; 3 = 0{,}01\left(e^{x+1}-1\right) \quad \Rightarrow \; 300 = e^{x+1}-1 \quad \Rightarrow \; 301 = e^{x+1}$

$\ln(301) = x + 1 \quad \Rightarrow \; x = \ln(301) - 1 \approx 4{,}7$

b) Zuerst Streckung um Faktor 3 in y-Richtung, dann Verschiebung um 0,2 nach unten

c) $\int_0^1 h(x)dx \approx \int_0^1 k(x)dx = \int_0^1 \left[3\cdot\left(\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x+3}\right)-0,2\right] dx =$

$= \int_0^1 \left[3\cdot\left((x+1)^{-1}-(x+3)^{-1}\right)-0,2\right]dx = \left[3\cdot\left(\ln(x+1)-\ln(x+3)\right)-0,2x\right]_0^1 =$

$= 3\cdot(\ln 2 - \ln 4) - 0,2 - [\,3(\ln 1 - \ln 3)] \approx 1,02$

Dieser Wert stellt den Gesamtschadstoffabbau (in Gramm) in der ersten Minute dar.