Teil A

1. a) Die Vektoren müssen paarweise aufeinander senkrecht stehen, also die jeweiligen Skalarprodukte müssen den Wert 0 ergeben.

$$\vec{a}\circ\vec{b}=\begin{pmatrix}2\\1\\2\end{pmatrix}\circ\begin{pmatrix}-1\\2\\0\end{pmatrix}=-2+2=0 \qquad \vec{a}\circ\vec{c_t}=\begin{pmatrix}2\\1\\2\end{pmatrix}\circ\begin{pmatrix}4t\\2t\\-5t\end{pmatrix}=8t+2t-10t=0$$

$$\vec{b}\circ\vec{c_t}=\begin{pmatrix}-1\\2\\0\end{pmatrix}\circ\begin{pmatrix}4t\\2t\\-5t\end{pmatrix}=-4t+4t+0=0$$

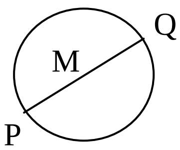
b) Volumen eines Quaders: Seitenlängen multiplizieren:

$$V_{Quader}=\left|\vec{a}\right|\cdot\left|\vec{b}\right|\cdot\left|\vec{c_t}\right|$$

$$15=\left|\begin{pmatrix}2\\1\\2\end{pmatrix}\right|\cdot\left|\begin{pmatrix}-1\\2\\0\end{pmatrix}\right|\cdot\left|\begin{pmatrix}4t\\2t\\-5t\end{pmatrix}\right| \quad => \quad 15=\sqrt{4+1+4}\cdot\sqrt{1+4+0}\cdot\sqrt{16t^2+4t^2+25t^2}$$

$$15=\sqrt{9}\cdot\sqrt{5}\cdot\sqrt{45t^2} \quad \Big|^2 \quad => \quad 225=9\cdot 5\cdot 45t^2$$

$$t^2=\frac{1}{3} \qquad \Rightarrow t_{1|2}=\pm\sqrt{\frac{1}{3}}$$

2. a) 

Aus der Skizze erkennt man, dass die Strecke [PQ] der Durchmesser ist.
Lösung der Aufgabe mit der Methode „Gehen auf bekannten Wegen“
vgl. auch Spiegelpunkt Skript §13 Punkt 1 ③

$$\vec{Q}=\vec{M}+\vec{PM} \quad \text{oder: } \vec{Q}=\vec{P}+2\cdot\vec{PM}$$

$$\vec{Q}=\vec{M}+\vec{PM}=\begin{pmatrix}-3\\2\\7\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-3-3\\2-4\\7-4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3\\2\\7\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-6\\-2\\-3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-9\\0\\4\end{pmatrix} \qquad \Rightarrow Q(9\,|\,0\,|\,4)$$

b) Der Abstand des Mittelpunkts M von der x_1x_2-Ebene muss so groß wie der Radius r der Kugel sein:

$$r=\left|\vec{PM}\right|=\sqrt{36+4+9}=\sqrt{49}=7$$

Abstand von M zur x_1x_2-Ebene ist ebenfalls 7, da die x_3-Koordinate 7 ist.

oder **Problem:** Abstand Punkt-Ebene Skript §11 Punkt 3

x_1x_2-Ebene: $x_3 = 0$ (HNF)

M in linke Seite: d(M;E) = |7| = 7

Teil B

a) Man liest evtl. die Koordinaten von B und G ab: B(8|0|5) und G(4|0|8)

Die Länge der zu den Koordinatenachsen parallele Seite [BC] des Rechtecks liest man ebenso ab: 10

Für die andere Seitenlänge des Rechtecks gilt:

$$\left|\overrightarrow{CH}\right| = \left|\begin{pmatrix} 4-8 \\ 10-10 \\ 8-5 \end{pmatrix}\right| = \left|\begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}\right| = \sqrt{16+0+9} = 5$$

Also ergibt sich für den Flächeninhalt: A = 5·10 = 50 (m²)

b) Einfachste Möglichkeit: Winkel α zwischen $\overrightarrow{CH}$ und $\overrightarrow{CD} = \begin{pmatrix} -8 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ (Ablesen!)

$$\cos\alpha = \frac{\overrightarrow{CH} \circ \overrightarrow{CD}}{\left|\overrightarrow{CH}\right| \cdot \left|\overrightarrow{CD}\right|} = \frac{\begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} -8 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}{5 \cdot 8} = \frac{32}{40} \quad \Rightarrow \quad \alpha = 36{,}87° > 35°$$

=> Errichtung einer Dachgaube zulässig

Die Dachfläche, auf der die Dachgaube errichtet wird, liegt im Modell in der Ebene E: $3x_1 + 4x_3 - 44 = 0$.

Die Dachgaube soll so errichtet werden, dass sie von dem seitlichen Rand der Dachfläche, der im Modell durch die Strecke [HC] dargestellt wird, den Abstand 2 m und vom First des Dachs den Abstand 1 m hat. Zur Ermittlung der Koordinaten des Punkts M wird die durch den Punkt T(4|8|8) verlaufende Gerade $t: \overrightarrow{X} = \begin{pmatrix} 4 \\ 8 \\ 8 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}$, $\lambda \in \mathbb{R}$, betrachtet.

c) Die Gerade t verläuft durch den Punkt T (Aufhängepunkt), der in E liegt und ihr RV ist derselbe wie $-\overrightarrow{CH}$ aus b). Damit ist die Gerade parallel zu [HC].

Der Abstand ist die Entfernung der Punkt H und T (Da die Strecke [HT] senkrecht zu den beiden Geraden HC und t verläuft, also 2 (Differenz der x_2-Koordinaten)

d) Der Fist ist [GH] (s. Aufgabentext ganz oben!). Somit muss der Vektor $\overrightarrow{TM}$ die Länge 1 haben. Man braucht also den Einheitsvektor des RV von t.

$$\overrightarrow{TM} = \frac{\begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}}{\sqrt{16+0+9}} = \frac{\begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}}{5} = \begin{pmatrix} 0,8 \\ 0 \\ -0,6 \end{pmatrix}$$

Lösung der Aufgabe mit der Methode „Gehen auf bekannten Wegen“

$$\vec{M} = \vec{T} + \overrightarrow{TM} = \begin{pmatrix} 4 \\ 8 \\ 8 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0,8 \\ 0 \\ -0,6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4,8 \\ 8 \\ 7,4 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow M(4,8\,|\,8\,|\,7,4)$$

e) Der Normalenvektor von F und E ist derselbe, damit sind die Ebenen parallel. Verschiebt man einen Punkt der Ebene E – z.B. C(8|10|5) – um 1,4 in x_3-Richtung, so muss der verschobene Punkt C‘(8|10|6,4) in F liegen:

C‘ in F: $3\cdot 8 + 4\cdot 6,4 - 49,6 = 0$

$24 + 25,6 - 49,6 = 0$

$0 = 0$ (w) Also: $C' \in F$

f) ▶ **N:** Der Punkt N liegt 1,4 über Punkt L, der sich auf E befindet. Also liegt N auf der Ebene F. Er liegt aber auch auf der Gerade n.

Damit ergibt sich das Problem Gegenseitige Lage Gerade-Ebene Skript §10 Punkt 4:

n in F: $3\cdot(4,8 + 6\mu) + 4\cdot(7,4 - \mu) - 49,6 = 0$
$14,4 + 18\mu + 29,6 - 4\mu + 3 - 49,6 = 0$
$-5,6 + 17\mu = 0$
$14\,\mu = 5,6 \quad => \mu = 0,4$

μ in n: $\vec{N} = \begin{pmatrix} 4,8 \\ 8 \\ 7,4 \end{pmatrix} + 0,4\cdot\begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7,2 \\ 8 \\ 7 \end{pmatrix}$ => N(7,2|8|7)

▶ **L:** Der Punkt N liegt ja 1,4 über Punkt L, also liegt L von N aus um –1,4 in x_3-Richtung verschoben.

L(7,2|8|5,6)