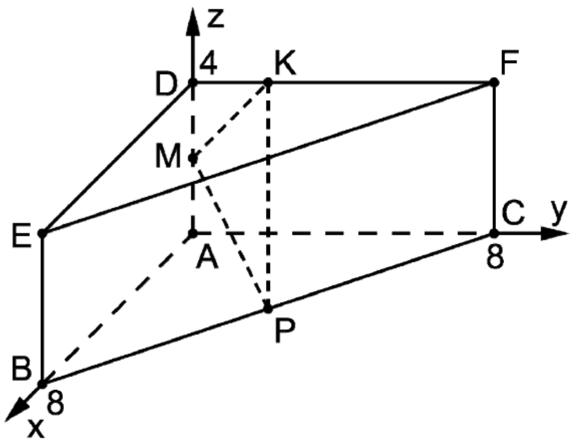
Teil A

1. Die Abbildung zeigt ein gerades Prisma ABCDEF mit A(0|0|0), B(8|0|0), C(0|8|0) und D(0|0|4).



a) Man liest die Koordinaten von F ab: F(0|8|4)

$$\left|\overrightarrow{BF}\right| = \left|\begin{pmatrix}0-8\\8-0\\4-0\end{pmatrix}\right| = \left|\begin{pmatrix}-8\\8\\4\end{pmatrix}\right| = \sqrt{64+64+16} = \sqrt{144} = 12$$

b) Man liest die Koordinaten von M und P ab: M(0|0|2) und P(4|4|0)

Die Punkte M und P sind die Mittelpunkte der Kanten [AD] bzw. [BC]. Der Punkt K(0|y_K|4) liegt auf der Kante [DF]. Bestimmen Sie y_K so, dass das Dreieck KMP in M rechtwinklig ist.

„Rechtwinklig" heißt, dass die Seitenvektoren $\overrightarrow{MK}$ und $\overrightarrow{MP}$ aufeinander senkrecht stehen, also ihr Skalarprodukt den Wert 0 besitzt.

$$\overrightarrow{MK} \circ \overrightarrow{MP} = 0$$

$$\begin{pmatrix}0-0\\y_K-0\\4-2\end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix}4-0\\4-0\\0-2\end{pmatrix} = 0$$

$0\cdot 4 + y_K\cdot 4 + 2\cdot(-2) = 0$

$4y_K = 4$

$y_K = 1$

2. a) Es fehlt x_1. Die Ebene liegt parallel zur x_1-Achse.

b) **Problem:** Abstand Punkt-Ebene Skript §11 Punkt 3

Wenn der Abstand des Mittelpunkts Z von E größer als 7 ist, schneidet die Kugel die Ebene nicht.

Normalenvektor von E: $\vec{n} = \begin{pmatrix}0\\3\\4\end{pmatrix}$, damit: $\left|\vec{n}\right| = \left|\begin{pmatrix}0\\3\\4\end{pmatrix}\right| = \sqrt{0+9+16} = 5$,

E: $\dfrac{3x_2+4x_3-5}{5} = 0$ (HNF) $\quad d(Z;E) = \left|\dfrac{3\cdot 6+4\cdot 3-5}{5}\right| = \left|\dfrac{25}{5}\right| = 5 < 7$ => Kugel schneidet Ebene.

Teil B

In einem kartesischen Koordinatensystem legen die Punkte A(4|0|0), B(0|4|0) und C(0|0|4) das Dreieck ABC fest, das in der Ebene E: $x_1 + x_2 + x_3 = 4$ liegt.

a) Bestimmen Sie den Flächeninhalt des Dreiecks ABC.

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 0-4 \\ 4-0 \\ 0-0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 0-4 \\ 0-0 \\ 4-0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$A = \frac{1}{2} \cdot \left|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\right| = \frac{1}{2} \cdot \left|\begin{pmatrix} -4 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}\right| = \frac{1}{2} \cdot \left|\begin{pmatrix} 16 \\ 16 \\ 16 \end{pmatrix}\right| = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{16^2+16^2+16^2} = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{3 \cdot 16^2} = \frac{1}{2} \cdot 16 \cdot \sqrt{3} = 8\sqrt{3}$$

b) z.B.: g: $\overrightarrow{X} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -4 \end{pmatrix}$

Problem: Gegenseitige Lage Gerade-Ebene Skript §10 Punkt 4

g in E: $(2 - \lambda) + (2 - \lambda) + (3 - 4\lambda) = 4$
$2 - \lambda + 2 - \lambda + 3 - 4\lambda = 4$
$-6\lambda = -3$
$\lambda = 0{,}5$

in g: $\overrightarrow{R} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + 0{,}5 \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1{,}5 \\ 1{,}5 \\ 1 \end{pmatrix}$ => R(1,5|1,5|1)

Punkt liegt im 1. Oktanten, damit auf dem Dreieck

c) Durch die Ebene E muss die Strecke [PQ] senkrecht halbiert werden.
Also muss ▶ der Mittelpunkt M der Strecke auf E liegen und
▶ der Verbindungsvektor von P und Q ein Vielfaches des Normalenvektors sein.

▶ $\overrightarrow{M} = \frac{\overrightarrow{P} + \overrightarrow{Q}}{2} = \frac{\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}{2} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ M in E: $1 + 1 + 2 = 4$ => $4 = 4$ (w)

▶ $\overrightarrow{PQ} = \begin{pmatrix} 0-2 \\ 0-2 \\ 1-3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix} = -2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = -2\vec{n}$

d) Die Ebene F wird durch die Punkte P Q und R festgelegt.

$$\overrightarrow{PQ} = \begin{pmatrix} 0-2 \\ 0-2 \\ 1-3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix} \qquad \vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \overrightarrow{PR} = \begin{pmatrix} 1,5-2 \\ 1,5-2 \\ 1\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0,5 \\ -0,5 \\ -2 \end{pmatrix} \qquad \vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4-1 \\ -(4-1) \\ 1-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \vec{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$F: \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \circ \left[\vec{X} - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right] = 0 \qquad F: x_1 - x_2 = 0$$

Einfallslot l : Aufhängepunkt ist R, RV der Normalenvektor von E:

$$l\!: \ \vec{X} = \begin{pmatrix} 1,5 \\ 1,5 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Problem: Gegenseitige Lage Gerade-Ebene Skript §10 Punkt 4

l in F: $(1,5 + \lambda) - (1,5 + \lambda) = 0$

$1,5 + \lambda - 1,5 - \lambda = 0$

$0 = 0$ (w)

e) **Problem:** Winkel zwischen zwei Geraden Skript §12

RV einfallender Strahl: $\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$ (vgl. d)!)

RV reflektierter Strahl: $\overrightarrow{RQ} = \begin{pmatrix} 0-1,5 \\ 0-1,5 \\ 1-\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1,5 \\ -1,5 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

RV Einfallslot: $\vec{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ (vgl. d)!)

$$\cos\alpha = \frac{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}}{\sqrt{1+1+16} \cdot \sqrt{1+1+1}} = \frac{1+1+4}{\sqrt{18} \cdot \sqrt{3}} = \frac{6}{3\sqrt{2} \cdot \sqrt{3}} = \frac{2}{\sqrt{6}} \left(= 0,816 \ \Rightarrow \ \alpha = 35,26° \right)$$

$$\cos\beta = \frac{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}}{\sqrt{1+1+0} \cdot \sqrt{1+1+1}} = \frac{1+1}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{3}} = \frac{2}{\sqrt{6}} \left(= 0,816 \ \Rightarrow \ \beta = 35,26° \right)$$