Teil A

1. Geben Sie jeweils den Term einer in ℝ definierten periodischen Funktion an, die die angegebene Eigenschaft hat.

   a) $g(x) = \sin(-x)$ oder wegen der (Punkt-)Symmetrie: $g(x) = -\sin x$

   b) Hier wurde der Wertebereichs [–1; 1] der sin-Funktion um 2 nach oben verschoben.

   $h(x) = \sin x + 2$

   c) $k(x) = \sin(ax)$ a ist a ist 2π dividiert durch den Wert der Periode, also $a = \frac{2\pi}{\pi} = 2$

   k(x) $k(x) = \sin(2x)$

2. a) Nullstellen Skript Kurvendiskussion 2.
   $e^x(x^2 + 2x) = 0$
   $x^2 + 2x = 0$
   $x(x + 2) = 0$ Nullstellen: $x_1 = 0$ $x_2 = -2$

   b) Stammfunktion Skript §17

   $F'(x) = 2x\cdot e^x + x^2 e^x = e^x\cdot(x^2 + 2x) = f(x)$ Produktregel Skript §05

   Stammfunktionen unterscheiden sich in der Konstante C:

   $G(x) = x^2\cdot e^x + C$

   Aus $G(1) = 2e$ folgt: $1^2\cdot e^1 + C = 2e$ => $e + C = 2e$ => $C = e$

   $G(x) = x^2\cdot e^x + e$

3. Wendepunkte und 2. Ableitung Skript §18

   Am Wendepunkt muss die 2. Ableitung den Wert 0 annehmen und ihr VZ ändern. Der zugehörige Graph muss also 2mal die x-Achse schneiden (mit VZW). Dies ist nur bei I der Fall.

4. Extremwertprobleme Skript §14
   Flächeninhalt A des Rechtecks soll maximal werden ($A = l\cdot b$)

   $l = x$ | $b = -\ln x$ x– und y-Koordinate des eingezeichneten Eckpunkts

   Zielfunktion: $A(x) = x\cdot(-\ln x) = -x\ln x$

   $A'(x) = -1\cdot\ln x - x\cdot\frac{1}{x} = -\ln x - 1$ Produktregel Skript §05

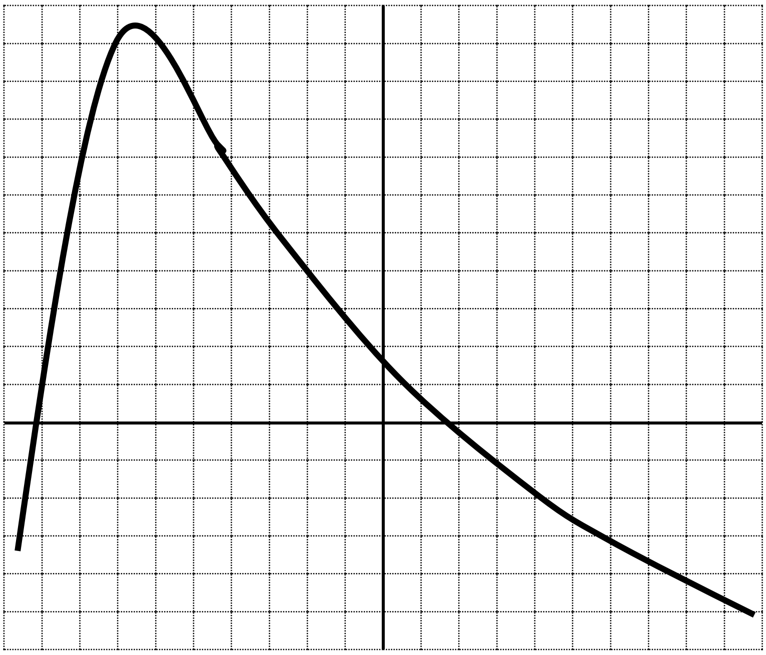
   $A'(x) = 0$ => $-\ln x - 1 = 0$ => $\ln x = -1$ => $x = e^{-1}$

   A‘ hat bei $x = e^{-1}$ einen VZW von + nach –, also liegt ein Maximum vor.

   Damit ergibt sich: $l = e^{-1}$ und $b = -\ln e^{-1} = -(-1) = 1$

5. a) Da f zunächst positiv ist, steigt der Graph der Stammfunktion. An der Stelle, an der die Nullstelle von f liegt, hat der Graph der Stammfunktion einen Hochpunkt, rechts davon fällt er (da f < 0).

b) Graph Stammfunktion
Für große x nähert sich der Wert der Funktion, also die Steigung der Stammfunktion dem Wert –0,5 an.



Teil B

1. a) Rationale Funktionen Skript §02

Definitionsmenge BWL Skript Kurvendiskussion 1.

B: $x^2 - 25 = 0$ => $x^2 = 25$ => $x_1 = -5 \mid x_2 = +5$

$D_f = \mathbb{R} \setminus \{-5; 5\}$

Symmetrie Skript Kurvendiskussion 3.

$f(-x) = \frac{20(-x)}{(-x)^2 - 25} = -\frac{20x}{x^2 - 25} = -f(x)$ => Graph ist punktsymmetrisch zum Ursprung

Nullstellen Skript Kurvendiskussion 2. auch: Skript §02

$f(x) = 0$

$20x = 0$ $x = 0$

Asymptoten Skript Kurvendiskussion 4. auch: Skript §02

Die Definitionslücken sind Polstellen, also vertikale Asymptoten: $x = -5$ und $x = 5$

Zählergrad ist kleiner als der Nennergrad, also horizontale Asymptote: $y = 0$

b) **Steigung**

Steigung in einem Punkt ist der Wert der Ableitung $f'(x_o)$

Quotientenregel Skript §05

$$f'(x) = \frac{(x^2 - 25) \cdot 20 - 20x \cdot 2x}{(x^2 - 25)^2} = \frac{20x^2 - 500 - 40x^2}{(x^2 - 25)^2} = -\frac{20x^2 + 500}{(x^2 - 25)^2}$$

Da der Zähler wegen x^2 positiv ist, der Nenner wegen des Quadrats für $x \in D$ auch, ist $f'(x) < 0$

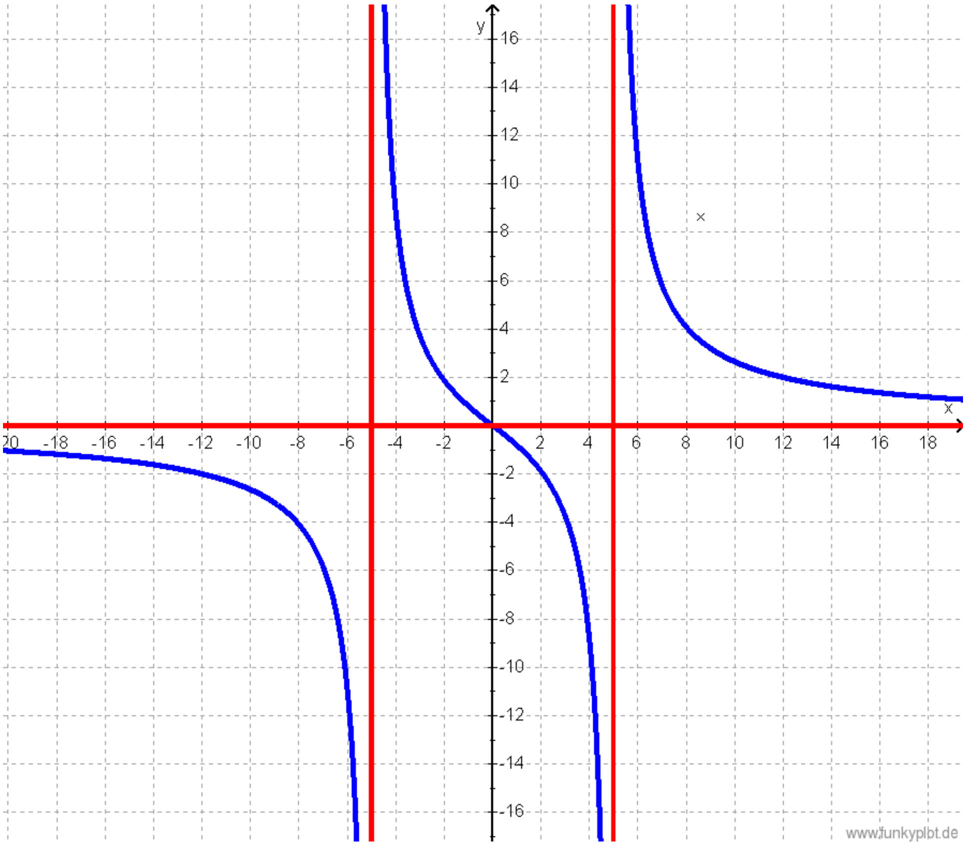
Winkel Skript Kurvendiskussion 6. (Neigungswinkel der Tangente)

$x_o = 0$ Nullstelle aus a)

$$f'(x_o) = f'(0) = -\frac{20 \cdot 0^2 + 500}{(0^2 - 25)^2} = -\frac{500}{625} = -0{,}8$$

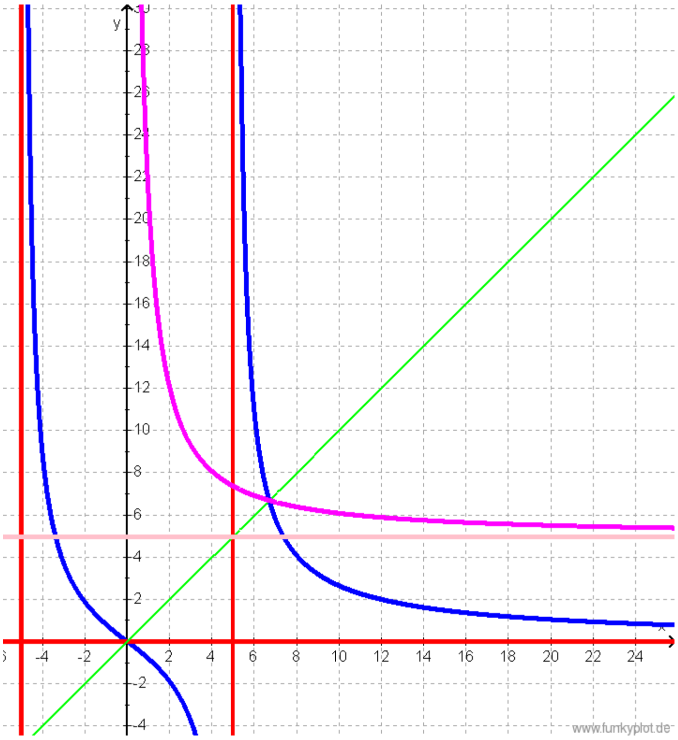
$\tan\alpha = 0{,}8$ => $\alpha = -38{,}66°$ oder $180° - 38{,}66° = 141{,}34°$

c)



d) Umkehrfunktion Skript §09

Aus dem Graphen ist ersichtlich, dass 2 verschiedene x-Werte denselben y-Wert haben. Damit ist f nicht umkehrbar. Im Bereich]5; +∞[ist f streng monoton (abnehmend), also ist f* umkehrbar.



e) Flächenberechnung Skript §21

$$A(s)=\int_{10}^{s}\frac{20x}{x^2-25}dx=10\cdot\int_{10}^{s}\frac{2x}{x^2-25}dx=$$ Stammfunktion von g‘(x)/g(x) Skript §21

$$=\left[10\cdot\ln\left|x^2-25\right|\right]_{10}^{s}=10\cdot\ln\left|s^2-25\right|-10\cdot\ln\left|10^2-25\right|=10\cdot\left(\ln\left|s^2-25\right|-\ln 75\right)=10\ln\frac{s^2-25}{75}$$

Da für s > 5 der Term s² – 25 positiv ist, gilt das für s >10 erst recht und die Betragsstriche können weggelassen werden.

f) $10\ln\frac{s^2-25}{75}=100 \mid :10$

$\ln\frac{s^2-25}{75}=10 \quad \mid e^{\cdots}$

$\frac{s^2-25}{75}=e^{10}$

$s^2-25=75e^{10}$

$s^2=75e^{10}+25$

$s_{1|2}=\pm\sqrt{75e^{10}+25}$ $s_1>10$ also $s=\sqrt{75e^{10}+25}$

g) **Grenzverhalten** Skript Kurvendiskussion 4.

$$\lim_{s\to+\infty}A(s)=\lim_{s\to+\infty}\left(10\ln\frac{s^2-25}{75}\right)=+\infty$$

2. a) Für $10\,\frac{km}{h}$: $t(10)=\frac{10}{10+5}+\frac{10}{10-5}=\frac{8}{3}$ $\frac{8}{3}\cdot 60\text{ min}=160\text{ min}$

Für $20\,\frac{km}{h}$: $t(20)=\frac{10}{20+5}+\frac{10}{20-5}=\frac{16}{15}$ $\frac{16}{15}\cdot 60\text{ min}=64\text{ min}$

b) Es gilt: $v=\frac{s}{t}$ (v: konstante Geschwindigkeit; s: zurückgelegter Weg; t: dafür benötigte Zeit)

Also $t=\frac{s}{v}$

Im Zähler eines Summanden steht der Weg von 10 km; im Nenner die jeweilige Geschwindigkeit:
Strömungsgeschwindigkeit + Eigengeschwindigkeit am Hinweg/flussabwärts und
Strömungsgeschwindigkeit – Eigengeschwindigkeit am Rückweg/flussaufwärts

c) In diesem Fall wäre der Rückweg nicht möglich, da das Motorboot vom Fluss weiter flussabwärts getrieben wird. Denn seine Eigengeschwindigkeit ist kleiner als die Strömungsgeschwindigkeit.

d) $$t(x)=\frac{10}{x+5}+\frac{10}{x-5}=\frac{10(x-5)}{(x+5)(x-5)}+\frac{10(x+5)}{(x-5)(x+5)}=\frac{10x-50+10x+50}{(x-5)(x+5)}=\frac{20x}{x^2-25}=f(x)$$

e) Man zieht eine Parallele zur x-Achse durch den vorgegebenen y-Wert der Eigengeschwindigkeit. Am Schnittpunkt mit dem Graphen liest man die x-Koordinate ab. Die dann die Eigengeschwindigkeit in km/h darstellt.
Für die Berechnung ist y = 4

$\frac{20x}{x^2-25} = 4$ => $20x = 4\left(x^2-25\right)$ | :4 => 5x = x² – 25

$x^2 - 5x - 25 = 0$

$x_{1|2} = \frac{5 \pm \sqrt{25+100}}{2} = \frac{5 \pm 5\sqrt{5}}{2} = 2{,}5 \pm 2{,}5\sqrt{5}$

x > 0, also Gesamtfahrtzeit: $\left(2{,}5 + 2{,}5\sqrt{5}\right)$ h ≈ 8,1 h