Teil A

1. Extrempunkte: Skript Kurvendiskussion 6.

$$f'(x)=\frac{\ln x\cdot 1-\frac{1}{x}\cdot x}{(\ln x)^2}=\frac{\ln x-1}{(\ln x)^2}$$ Quotientenregel Skript §05

$f'(x) = 0 \Rightarrow \ln x = 1 \Rightarrow x = e;\ y = f(e) = \frac{e}{\ln e}=\frac{e}{1}=e$

Art des Extrempunkts über VZ-Tabelle Skript Kurvendiskussion 6.

	0 … 1	1 … e	> e
$\ln x - 1$	–	–	+
$(\ln x)^2$	+	+	+
f'(x)	**–**	**–**	**+**

Alternativ: **Art des Extrempunkts über f''(x)** Skript Kurvendiskussion 10.

$$f''(x)=\frac{(\ln x)^2\cdot\frac{1}{x}-2\ln x\cdot\frac{1}{x}(\ln x-1)}{(\ln x)^4}=\frac{\ln x\cdot\frac{1}{x}(\ln x-2\ln x+2)}{(\ln x)^4}=\frac{2-\ln x}{x(\ln x)^3}$$

$$f''(x)=\frac{2-\ln e}{e(\ln e)^3}=\frac{2-1}{e(1)^3}=\frac{1}{e}>0$$

Ergebnis: Tiefpunkt: T(e | e)

2. a) Nullstellen Skript Kurvendiskussion 2.

$e^x(x^2 + 2x) = 0$

$x^2 + 2x = 0$

$x(x + 2) = 0$ Nullstellen: $x_1 = 0$ $x_2 = -2$

b) Stammfunktion Skript §17

$F'(x) = 2x\cdot e^x + x^2 e^x = e^x\cdot(x^2 + 2x) = f(x)$ Produktregel Skript §05

Stammfunktionen unterscheiden sich in der Konstante C:

$G(x) = x^2\cdot e^x + C$

Aus G(1) = 2e folgt: $1^2\cdot e^1 + C = 2e \Rightarrow e + C = 2e \Rightarrow C = e$

$G(x) = x^2\cdot e^x + e$

3. a) α) sinx hat die Wertemenge [–1; 1], also muss der Graph um 1 in y-Richtung verschoben werden (a ist beliebig, z.B. a = 1)

$a = 1 \mid c = 1$

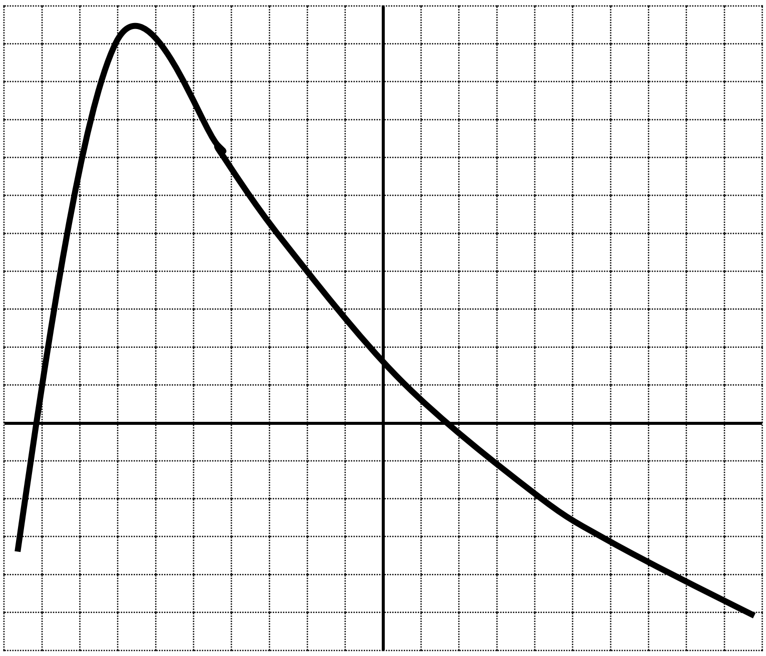
β) Damit passen in [0; π] 1,5 Perioden, also ist eine Periode 2/3 π. a ist 2π dividiert durch diesen Wert und c ist beliebig, also z.B. c = 0

$$a=2\pi:\frac{2\pi}{3}=3 \quad | \quad c=0$$

b) $g'_{a,c} = a \cdot \cos(ax)$ Da für die Wertemenge von g'_1 (mit $g'_1(x) = \cos x$) gilt: $W = [-1; 1]$ muss man jeweils den a-fachen Wert nehmen, also $W = [-a; a]$

4. a) Da f zunächst positiv ist, steigt der Graph der Stammfunktion. An der Stelle, an der die Nullstelle von f liegt, hat der Graph der Stammfunktion einen Hochpunkt, rechts davon fällt er (da $f < 0$).

b) Graph Stammfunktion
Für große x nähert sich der Wert der Funktion, also die Steigung der Stammfunktion dem Wert –0,5 an.



Teil B

Gegeben ist die Funktion f: $x \mapsto 2-\sqrt{12-2x}$ mit maximaler Definitionsmenge D_f=]–∞; 6]. Der Graph von f wird mit G_f bezeichnet.

1. a) **SP mit x-Achse** Skript Kurvendiskussion 2.

$2-\sqrt{12-2x}=0$

$\sqrt{12-2x}=2 \,|^2$

12 – 2x = 4 Probe: l.S. $2-\sqrt{12-2\cdot 4}=2-\sqrt{4}=0$ (unerlässlich!)

x = 4 N(4|0)

SP mit y-Achse Skript Kurvendiskussion 2.

$f(0)=2-\sqrt{12-2\cdot 0}=2-4\sqrt{3}\approx -4{,}8$ $S_y(0|\,2-4\sqrt{3}\,)$

Grenzverhalten Skript Kurvendiskussion 4.

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}\left(2-\sqrt{\underbrace{12-2\cdot x}_{\to+\infty}}\right)=-\infty$$

Funktionswert

$f(6)=2-\sqrt{12-2\cdot 6}=2-\sqrt{0}=2$

b) $f'(x)=-\dfrac{-2}{2\sqrt{12-2x}}=\dfrac{1}{\sqrt{12-2x}}$ Kettenregel Skript §11

Definitionsmenge BWL Skript Kurvendiskussion 1.

W: $12-2x\geq 0$ => $-2x\geq -12 \;|:(-2)$ => $x\leq 6$

B: $\sqrt{12-2x}=0$ => $12-2x=0$ => $x=6$

$D_{f'}$ =]–∞; 6[

Grenzverhalten Skript Kurvendiskussion 4.

$$\lim_{x\to 6} f'(x)=\lim_{x\to 6}\frac{1}{\underbrace{\sqrt{12-2x}}_{\to 0^+}}=+\infty$$

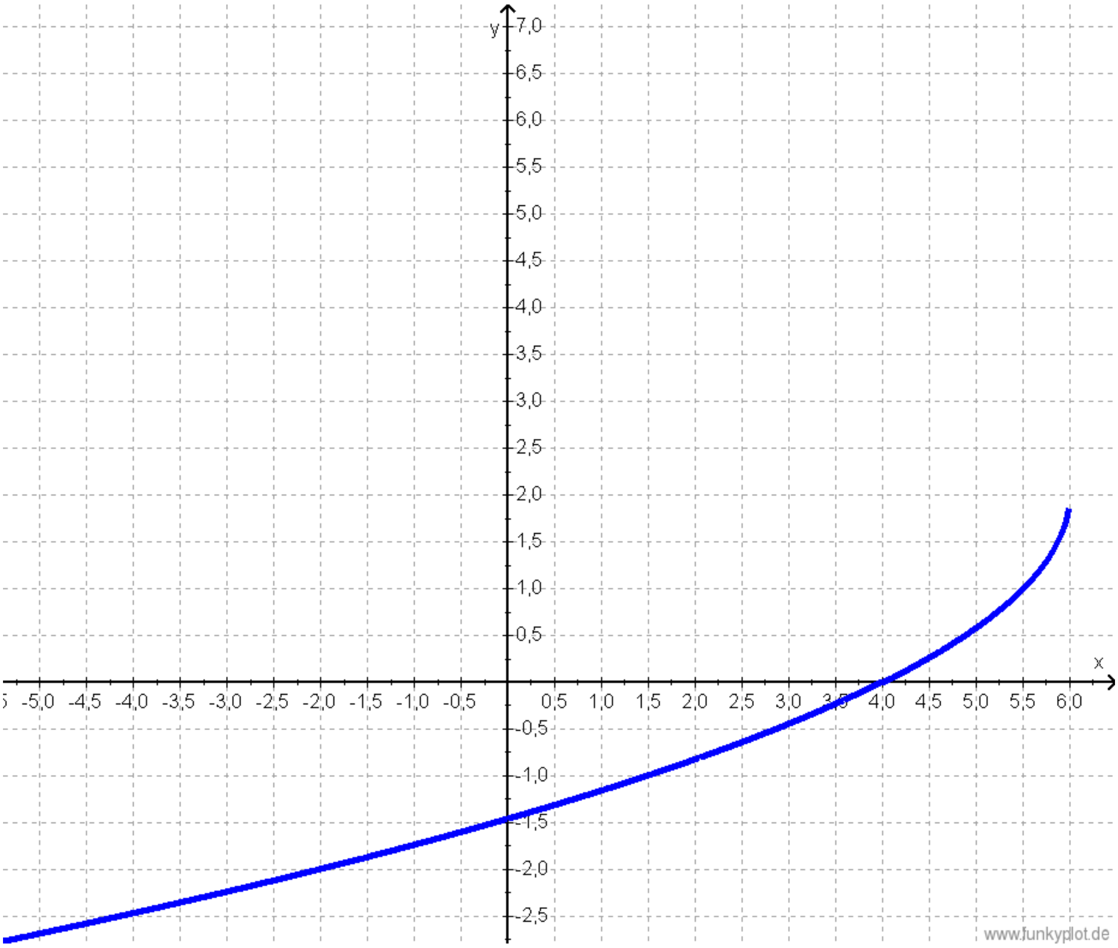
Die an G_f Tangente bei x = 6 ist vertikal

c) Monotonieverhalten Skript §08

Da die Ableitung positiv ist, ist die Funktion in D streng monoton zunehmend.

Es gilt: W =]–∞; 2] ($\lim_{x\to-\infty} f(x)$ und f(6) betrachten)

d) $f(-2) = 2 - \sqrt{12 - 2 \cdot (-2)} = 2 - \sqrt{16} = -2$



e) Umkehrfunktion Skript §09

$D_{f^{-1}} = W_f =]-\infty; 2]$

f: $y = 2 - \sqrt{12 - 2 \cdot x}$

$y - 2 = -\sqrt{12 - 2 \cdot x} \quad |^2$

$(y-2)^2 = 12 - 2x$

$y^2 - 4y + 4 = 12 - 2x$

$y^2 - 4y - 8 = -2x$

$-0{,}5y^2 + 2y + 4 = x$

f^{-1}: $y = -0{,}5x^2 + 2x + 4$

2. a) $h(x) = x$

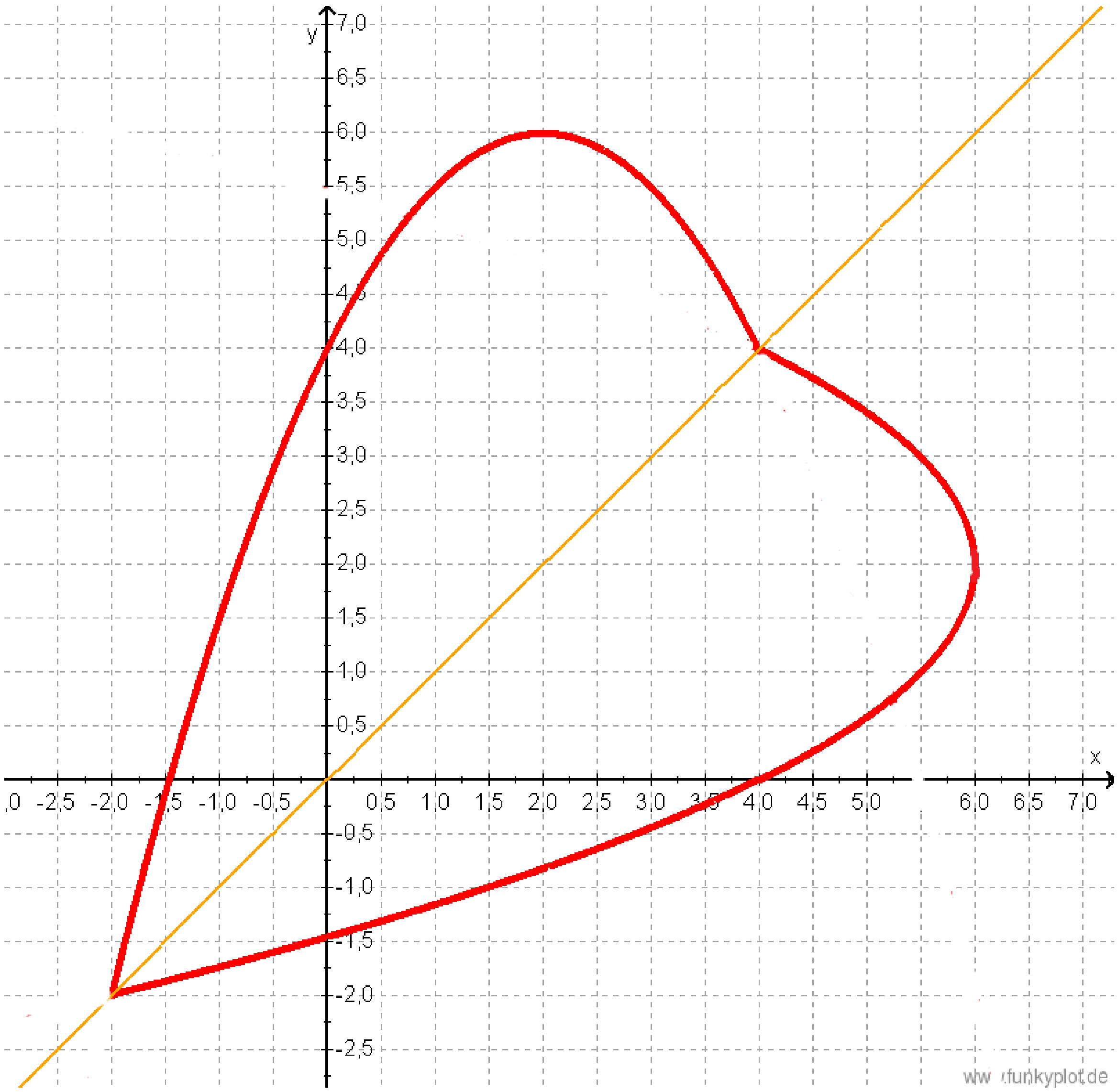
$-0{,}5x^2 + 2x + 4 = x$

$-0{,}5x^2 + x + 4 = 0 \quad | \cdot(-2)$

$x^2 - 2x - 8 = 0$ Vieta: Summenwert –2 und Produktwert –8

$(x - 4)(x + 2) = 0$ => $x_1 = -2 \quad | \; x_2 = 4$

b)



3. a) Fläche zwischen 2 Funktionsgraphen Skript §21

Differenzfunktion: d(x) = h(x) – x = –0,5x² + x + 4 vgl. 2.a) Nullstellen von d

$$A = \int_{-2}^{4} \left(-0,5x^2 + x + 4\right)dx = \left[-\frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + 4x\right]_{-2}^{4} =$$

$$= \left[-\frac{1}{6}\cdot 4^3 + \frac{1}{2}\cdot 4^2 + 4\cdot 4\right] - \left[-\frac{1}{6}\cdot(-2)^3 + \frac{1}{2}\cdot(-2)^2 + 4\cdot(-2)\right] = 18$$

Das berechnete Integral ist der halbe Inhalt des gesuchten Flächeninhalts. Also hat das Blatt einen Flächeninhalt von 36 cm².

b) Tangentengleichung Skript Kurvendiskussion 5.

$h(x) = -0,5x^2 + 2x + 4$ $h'(x) = -x + 2$

$x_0 = -2$

$h(x_o) = -2$

$h'(-2) = 4$

Über Geradengleichung	oder über Formel
$y = mx + t$	$y = 4(x - (-2)) - 2$
$-2 = 4\cdot(-2) + t$	$y = 4x + 8 - 2$
$t = 6$	

$y = 4\cdot x + 6$

Winkel zwischen Tangente und der Horizontalen: $\tan \alpha_1 = 6 \Rightarrow \alpha_1 = 80{,}5°$

Winkel zwischen der Winkelhalbierenden und der Tangente: $\alpha_2 = 80{,}5° - 45° = 34{,}5°$

gesuchter Winkel ist wegen der Symmetrie zur Winkelhalbierenden (mit dem Neigungswinkel 45°) doppelt so groß wie α_2, also $\alpha = 69°$

c) I. und II. An der Stelle x = 0 sollen sich die beiden Annäherungsfunktionsgraphen ohne „Ecke“ schneiden, also müssen sie denselben y-Wert (I) und dieselbe Steigung (II) haben.

Der Ort der Blattspitze ist unverändert, deshalb müssen die Funktionswerte an der Stelle x = –2 übereinstimmen (III).

Die Steigung der Blattspitze ist weniger steil als die des Herz im bisherigen Modell, damit muss auch k‘(–2) kleiner sein als h‘(–2) = 6 (IV).