

a) **Punkt C**

Es gilt: $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$.

Damit errechnet sich C folgendermaßen: $\vec{C} = \vec{B} + \overrightarrow{AD} = \begin{pmatrix} 28 \\ 10 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 20-28 \\ 0-0 \\ 6-0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20 \\ 10 \\ 6 \end{pmatrix} \Rightarrow C(20|10|6)$

Quadrat Skript §13 Punkt 2.

Da es sich um einen Spat handelt, sind die Seiten [AB] und [CD] gleichlang und parallel, ebenso die Seiten [BC] und [AD]. Also ist nur zu zeigen, dass z.B. auch [AD] und [AB] gleich lang sind und einen rechten Winkel einschließen.

$$|\overrightarrow{AD}| = \left| \begin{pmatrix} 20-28 \\ 0-0 \\ 6-0 \end{pmatrix} \right| = \left| \begin{pmatrix} -8 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{64+0+36} = 10$$

$$|\overrightarrow{AB}| = \left| \begin{pmatrix} 28-28 \\ 10-0 \\ 0-0 \end{pmatrix} \right| = \left| \begin{pmatrix} 0 \\ 10 \\ 0 \end{pmatrix} \right| = 10$$

$$\overrightarrow{AB} \circ \overrightarrow{AD} = \begin{pmatrix} 0 \\ 10 \\ 0 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} -8 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow \sphericalangle(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AD}) = 90^\circ$$

Also handelt es sich beim Viereck ABCD um ein Quadrat.

b) **Normalenform Skript §10 Punkte 2. und 3.**

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AD} = \begin{pmatrix} 0 \\ 10 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -8 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \cdot 6 - 0 \\ -(0 - 0) \\ 0 - (-8) \cdot 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 60 \\ 0 \\ 80 \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{n} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} \circ \left(\vec{X} - \begin{pmatrix} 28 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right) = 0$$

$$E: 3x_1 + 4x_3 - 84 = 0$$

c) **Winkel zwischen zwei Ebenen Skript §12**

$$\text{Normalenvektor der } x_1x_2\text{-Ebene: } \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\cos \alpha = \frac{\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}{\sqrt{9+16} \cdot 1} = \frac{4}{5} \Rightarrow \alpha = 36,87^\circ$$

- d) Die Ebene F liegt parallel zur Ebene E und enthält den Ursprung. Damit hat sie denselben Normalenvektor wie E (also dieselben Koeffizienten) und die additive Konstante ist Null.

$$F: 3x_1 + 4x_3 = 0$$

- e) Setzt man das vordere Prisma ABF_1F_2CD (F_1 und F_2 sind die Lotfußpunkte der Lote von C auf BQ bzw. D auf AP (gepunktete Linien vorne)) nach hinten (gepunktete Linien) entsteht ein volumengleicher Quader, der als Grundfläche die genannte Rechteckfläche und als Höhe die Höhe des Spats besitzt. Sein Volumen errechnet sich $V = Gh$.

- f) Länge: $l = 28$ (x_1 -Koordinate von A);
 Breite: $b = 10$ (Länge von [AB]);
 Höhe: $h = 6$ (x_3 -Koordinate von D)

$$\text{Volumen: } V = 2,8\text{m} \cdot 1,0\text{m} \cdot 0,6\text{m} = 1,68\text{m}^3 \quad (1 \text{ LE} = 0,1\text{m})$$

$$\text{Masse: } 1,68 \cdot 2,1\text{t} = 3,528\text{t}$$

- g) **Gerade Skript §09**

Schnittpunkt der Diagonalen: Mittelpunkt des Rechtecks $M(14|5|0)$ (Mittelwerte der Koordinaten der Eckpunkte)

$$\text{Damit ergibt sich: } h: \vec{X} = \begin{pmatrix} 11 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 14-11 \\ 5-3 \\ 0-6 \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{X} = \begin{pmatrix} 11 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -6 \end{pmatrix}$$

Die Wahl des Aufhängepunkts ist sinnvoll, da von diesem Punkt aus drei Viertel der Stange, also 1,05m aus der Deckfläche herausragt.

Ende der Stange: z.B. Schnittpunkt der Gerade h mit einer Kugel um H mit Radius 1,05 m = 10,5 LE

$$\text{Kugel Skript §07} \quad \left(\vec{X} - \begin{pmatrix} 11 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix} \right)^2 = 10,5^2$$

$$\text{Einsetzen der Gerade h: } \left(\begin{pmatrix} 11 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -6 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 11 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix} \right)^2 = 10,5^2 \Rightarrow \left(\lambda \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -6 \end{pmatrix} \right)^2 = 10,5^2$$

$$9\lambda^2 + 4\lambda^2 + 36\lambda^2 = 10,5^2$$

$$49\lambda^2 = 10,5^2$$

$$\lambda^2 = 2,25$$

$$\lambda = \pm 1,5$$

benötigt wird der Punkt auf der Gerade h, dessen x_3 -Koordinate größer als 6 ist, also: $\lambda = -1,5$

$$\vec{P} = \begin{pmatrix} 11 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix} - 1,5 \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6,5 \\ 0 \\ 15 \end{pmatrix} \quad P(6,5|0|15)$$

- h) Der Mittelpunkt der Stahlkugel hat die x_3 -Koordinate $6 + 8 = 14$ (Radius $0,8\text{m} = 8 \text{ LE}$) und dieselben x_1 - und x_2 -Koordinaten wie der Punkt K. Dann kann man die Kugelgleichung aufstellen und die Gerade h einsetzen. Ergibt sich genau eine Lösung, dann berührt die Kugel die Stange.