Teil 1

1. **Definitionsmenge** BWL Skript Kurvendiskussion 1.

   L: $2013 - x > 0 \quad \Rightarrow \quad -x > -2013 \quad \Rightarrow x < 2013$

   $D_f = \,]-\infty; 2013[$

   Grenzverhalten Skript Kurvendiskussion 4.

   $$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \ln(2013 - x) = +\infty$$

   $$\lim_{x\to2013} f(x) = \lim_{x\to2013^-} \ln\underbrace{(2013 - x)}_{\to 0^+} = -\infty$$

   Schnittpunkte mit x-Achse Skript Kurvendiskussion 2.

   $\ln(2013 - x) = 0 \mid e^{\cdots} \quad \Rightarrow \quad 2013 - x = 1 \quad \Rightarrow \quad x = 2012 \quad N(2012 \mid 0)$

   Schnittpunkt mit y-Achse Skript Kurvendiskussion 2.

   $f(0) = \ln(2013 - 0) = \ln 2012 \approx 7{,}61 \quad S_y(0 \mid \ln 2012)$

2. Krümmungsverhalten Skript §18

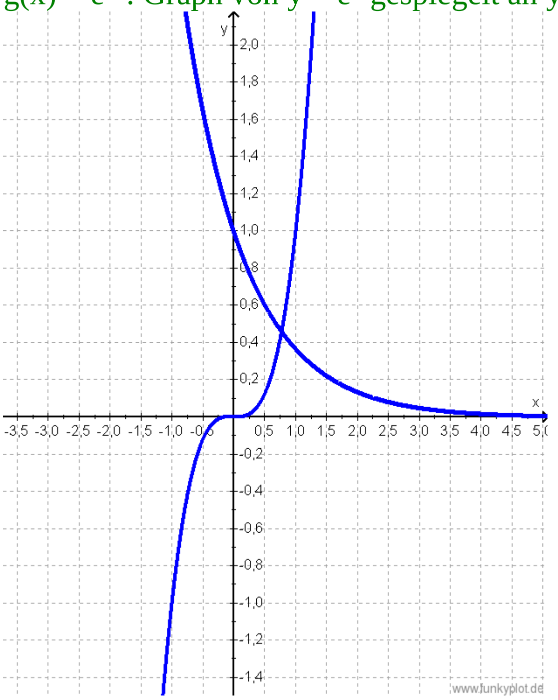
   $f'(x) = 1\cdot\sin x + x\cdot\cos x = \sin x + x\cos x$ Produktregel Skript §05

   $f''(x) = \cos x + 1\cdot\cos x - x\sin x$ Produktregel im 2. Summanden (xcosx) Skript §05

   $f''(0) = \cos 0 + 1\cdot\cos 0 - 0\sin 0 = 1 + 1 - 0 = 2 > 0$

   Der Graph ist linksgekrümmt.

3. a) $g(x) = e^{-x}$: Graph von $y = e^x$ gespiegelt an y-Achse



b) $d(x) = e^{-x} - x^3$ Nullstelle der Differenzfunktion ist Schnittstelle der Graphen von g und h.

Newtonverfahren: $x_1 = x_o - \frac{d(x_o)}{d'(x_o)}$ Skript §07

Man benötigt die drei Werte x_o; $d(x_o)$ und $d'(x_o)$:

$d'(x) = -e^{-x} - 3x^2$

- ▶ $x_o = 1$
- ▶ $d(x_o) = e^{-1} - 1^3 = e^{-1} - 1$
- ▶ $d'(x_o) = -e^{-1} - 3 \cdot 1^2 = -e^{-1} - 3$

$$x_1 = 1 - \frac{e^{-1} - 1}{-e^{-1} - 3} \approx 0{,}8123$$

4. a) Flächenberechnung/Integralfunktion Skript §19 Skript §20

Bei der Fläche zwischen x-Achse und Graph handelt es sich um 2 Halbkreise mit dem Radius 1, also dem jeweiligen Flächeninhalt $0{,}5 \cdot r^2\pi = 0{,}5\pi \approx 1{,}57$.

$F(0) = \int_0^0 f(t)dt = 0$ Keine Fläche entsteht.

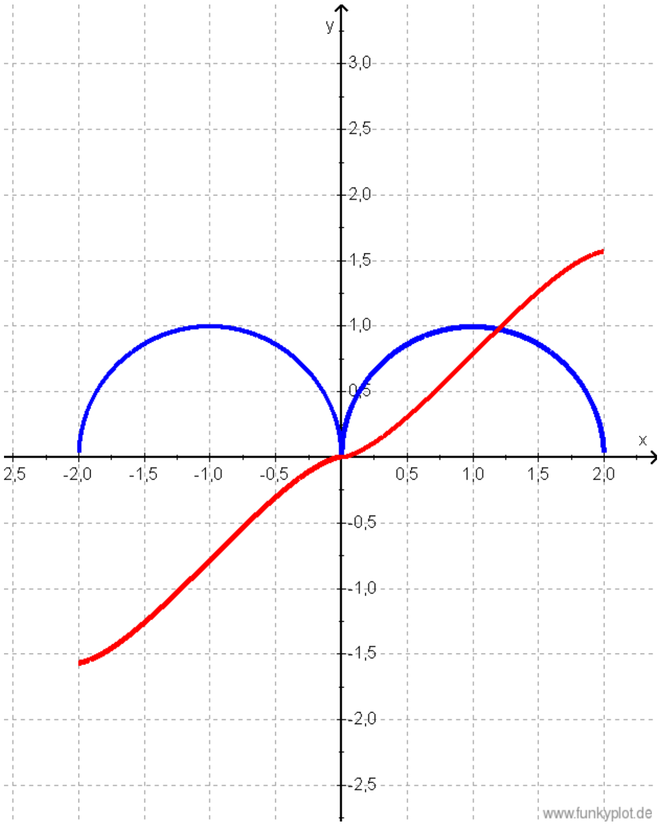
$F(2) = \int_0^2 f(t)dt = 0{,}5\pi$ Flächeninhalt rechter Halbkreis;

positiv, da von links nach rechts integriert.

$F(-2) = \int_0^{-2} f(t)dt = -0{,}5\pi$ Flächeninhalt linker Halbkreis

negativ, da von rechts nach links integriert.

b)



Teil 2

1. a) **Asymptoten**

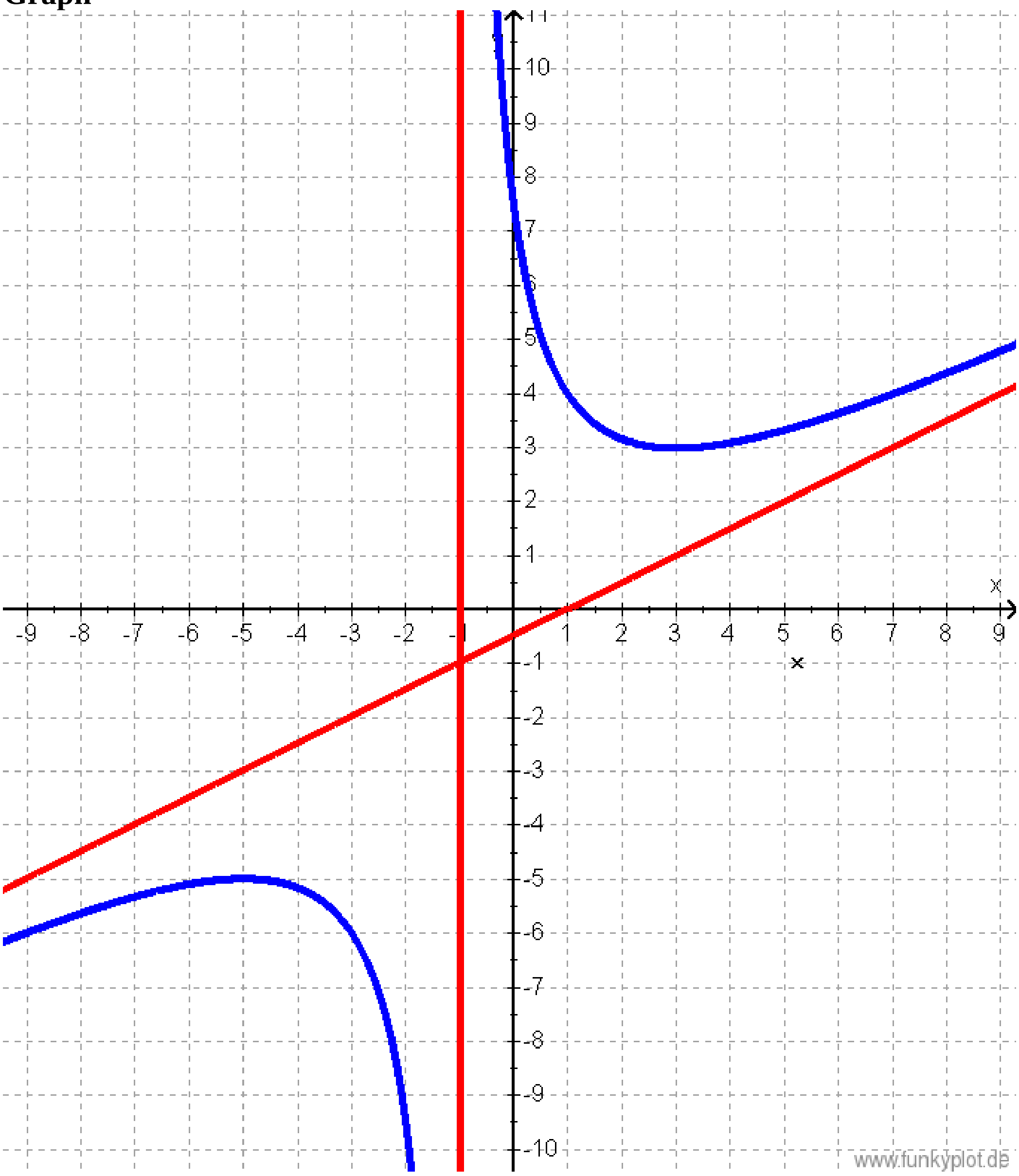
Grenzverhalten/Asymptoten Skript Kurvendiskussion 4.

Da nur die Gleichungen anzugeben sind, müssen die Grenzwerte nicht berechnet werden. Man sieht am Graphen, dass an der Definitionslücke eine vertikale Asymptote vorliegt. Außerdem ergibt sich der Term der schrägen Asymptote aus dem ganzrationalen Anteil des Funktionsterms.
Rationale Funktionen/schräge Asymptoten Skript §02 .

vertikale Asymptote: $x = -1$

schräge Asymptote: $y = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$

Graph



Schnittpunkt mit Asymptote

Funktionsterm und Asymptotenterm gleichsetzen

$$f(x) = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{2}x - \frac{1}{2} + \frac{8}{x+1} = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$$

$$\frac{8}{x+1} = 0$$

8 = 0 (f) => Kein Schnittpunkt

b) **Extrempunkte** Skript Kurvendiskussion 7.

$$f'(x) = x \mapsto \frac{1}{2} + \frac{(x+1)\cdot 0 - 1\cdot 8}{(x+1)^2} = \frac{1}{2} + \frac{-8}{(x+1)^2} = \frac{(x+1)^2}{2(x+1)^2} - \frac{2\cdot 8}{2(x+1)^2} =$$

$$= \frac{(x+1)^2 - 16}{2(x+1)^2} = \frac{x^2+2x+1-16}{2(x+1)^2} = \frac{x^2+2x-15}{2(x+1)^2} = \frac{(x+5)(x-3)}{2(x+1)^2}$$

Quotientenregel Skript §05

Hauptnenner bilden; letzte Umformung über Satz von Vieta

$f'(x) = 0$

$(x + 5)(x - 3) = 0$

$x_1 = -5 \qquad y_1 = \frac{1}{2}\cdot(-5) - \frac{1}{2} + \frac{8}{-5+1} = -\frac{5}{2} - \frac{1}{2} + \frac{8}{-4} = -3 - 2 = -5$

$x_2 = 3 \qquad y_2 = \frac{1}{2}\cdot 3 - \frac{1}{2} + \frac{8}{3+1} = \frac{3}{2} - \frac{1}{2} + \frac{8}{4} = 1 + 2 = 3$

Art des Extrempunkts über VZ-Tabelle Skript Kurvendiskussion 7.

		–5	–1	3
(x + 5)	–	+	+	+
(x – 3)	–	–	–	+
(x + 1)²	+	+	+	+
f‘(x)	+	–	–	+
	↗	↘	↘	↗

Alternativ: **Art des Extrempunkts über f‘‘(x)** Skript Kurvendiskussion 10.

$$f'(x) = \frac{x^2+2x-15}{2(x+1)^2}$$

$$f''(x) = \frac{2(x+1)^2\bullet(2x+2) - 2\cdot 2(x+1)\cdot 1\bullet(x^2+2x-15)}{4(x+1)^4} =$$

$$= \frac{2(x+1)\left[(x+1)(2x+2) - 2\cdot(x^2+2x-15)\right]}{4(x+1)^4} = \frac{2x^2+2x+2x+2-2x^2-4x+30}{(x+1)^3} = \frac{32}{(x+1)^3}$$

$$f''(-5)=\frac{32}{(-5+1)^3}=\frac{32}{-64}<0\ \text{(MAX)} \qquad f''(3)=\frac{32}{(3+1)^3}=\frac{32}{64}>0\ \text{(MIN)}$$

Ergebnis: Hochpunkt: T(–5 | –5) Tiefpunkt: T(3 | 3)

2. a) **Verschobener Graph**

Verschiebung um 1 in positive y-Richtung: Addition der Zahl 1 zu f(x)
Verschiebung um 1 in positive x-Richtung: Subtraktion der Zahl 1 von jedem x

$$g(x)=\frac{1}{2}(x-1)-\frac{1}{2}+\frac{8}{(x-1)+1}\quad+1=\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}+1+\frac{8}{x-1+1}=\frac{1}{2}x+\frac{8}{x}$$

Symmetrie Skript Kurvendiskussion 3.

$$f(-x)=\frac{1}{2}(-x)+\frac{8}{-x}=-\frac{1}{2}x-\frac{8}{x}=-\left(\frac{1}{2}x+\frac{8}{x}\right)=-f(x)$$

Graph von g ist punktsymmetrisch zum Ursprung.

b) Flächenberechnung/Integralfunktion Skript §19 Skript §20

$$\int_0^4 f(x)dx=\int_0^4\left(\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}+\frac{8}{x+1}\right)=\left[\frac{1}{2}\cdot\frac{x^2}{2}-\frac{1}{2}x+8\ln(x+1)\right]_0^4=\left[\frac{x^2}{4}-\frac{x}{2}+8\ln(x+1)\right]_0^4=$$

$$=\left[\frac{4^2}{4}-\frac{4}{2}+8\ln(4+1)\right]-\left[\frac{0^2}{4}-\frac{0}{2}+8\ln(0+1)\right]=4-2+8\cdot\ln 5-\underbrace{8\ln 1}_{=0}=2+8\cdot\ln 5$$

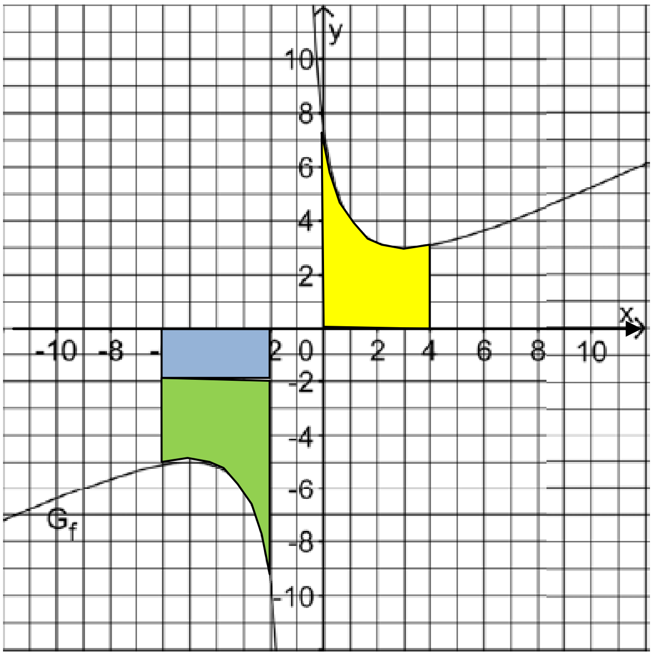


Abb. 2

Der Wert dieses Integrals entspricht dem Inhalt der gelben Fläche. Aus Symmetriegründen findet sich diese Fläche auch im 3. Quadranten (grün). Der Wert des gesuchten Integrals $\int_{-6}^{-2} f(x)dx$ ist die Summe aus dem Inhalt der grünen Fläche und dem blauen Rechteck mit Flächeninhalt A = (–2–(–6))·2 = 8, da ein Intergral den Inhalt der Fläche zwischen Graph und x-Achse beschreibt.

Also: $\int_{-6}^{-2} f(x)dx = 10 + 8\ln 5$

3. a) $f(0)=\frac{1}{2}\cdot 0-\frac{1}{2}+\frac{8}{0+1}=-\frac{1}{2}+\frac{8}{1}=7{,}5$

$f(15)=\frac{1}{2}\cdot 15-\frac{1}{2}+\frac{8}{15+1}=7{,}5-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=7{,}5$

Der Schwerpunkt der Dose liegt auf der Höhe 7,5 cm (halbe Dosenhöhe) so sowohl bei leerer Dose (Füllhöhe x = 0) als auch bei voller Dose (Füllhöhe x = 15)

b) Zunächst sinkt der Schwerpunkt bis auf die Höhe 3cm. Hier ist auch die Füllhöhe 3cm, also liegt der Schwerpunkt auf der Deckfläche der Flüssigkeit. Dann steigt der Schwerpunkt langsam an, bis er wieder die halbe Dosenhöhe erreicht hat.

c)

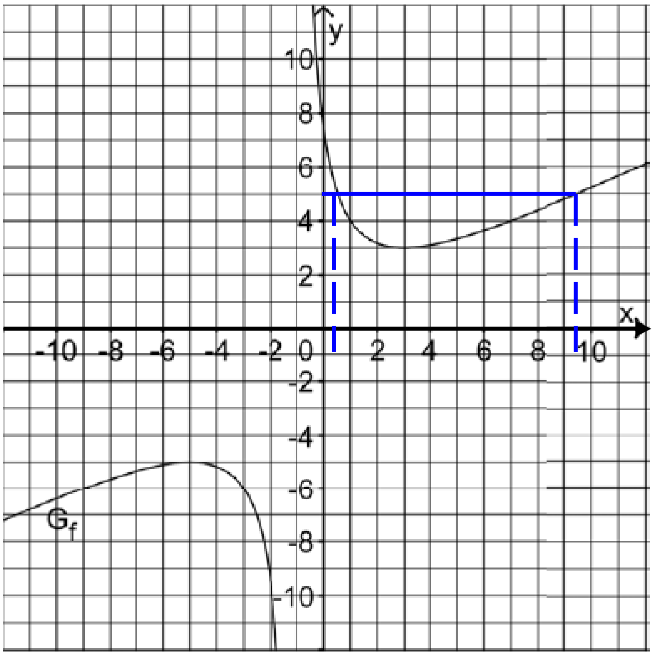


Abb. 2

Aus der Abbildung kann man die x-Werte 0,5 und 9,5 ablesen, zwischen denen der Graph unter dem y-Wert 5 liegt. Also x ∈ [0,5; 9]

Es muss gelten: $f(x) \le 5$

Also: $\frac{1}{2}x - \frac{1}{2} + \frac{8}{x+1} \le 5 \quad \left| +\frac{1}{2} \quad \right| \cdot (x+1) > 0, \text{ da } x \ge 0$

$\frac{1}{2}x(x+1) + 8 \le 5{,}5(x+1)$

$\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x + 8 \le 5{,}5x + 5{,}5$

$\frac{1}{2}x^2 - 5x + 2{,}5 \le 0 \quad |\cdot 2$

$x^2 - 10x + 5 \le 0$

Lösen der Gleichung $x^2 - 10x + 5 = 0$

$x_{1|2} = \frac{10 \pm \sqrt{100-20}}{2} = \frac{10 \pm \sqrt{80}}{2} = \frac{10 \pm 4\sqrt{5}}{2} = 5 \pm 2\sqrt{5}$

Also $x \in \left[5 - 2\sqrt{5};\ 5 + 2\sqrt{5}\right]$

Exakte Werte, nicht runden!