Teil 1

1. a) **Definitionsmenge** BWL Skript Kurvendiskussion 1.

W: $3x + 9 \geq 0$ => $3x \geq -9$ => $x \geq -3$

$D_{f'} =]-3; +\infty[$

Nullstellen Skript Kurvendiskussion 2.

W: $3x + 9 = 0$ => $x = -3$

b) Tangente Skript Kurvendiskussion 6.

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{3x+9}} \cdot 3 = \frac{3}{2\sqrt{3x+9}}$$ Kettenregel Skript §11

$x_o = 0$

$f(x_o) = 3$

$$f'(x_o) = \frac{3}{2\sqrt{3 \cdot 0 + 9}} = \frac{1}{2} = 0{,}5$$

$y = mx + t$

$3 = 0{,}5 \cdot 0 + t$

$t = 3$

$y = 0{,}5x + 3$

oder über Formel $y = f'(x_o) \cdot (x - x_o) + f(x_o)$

$y = 0{,}5(x - 0) + 3$

$y = 0{,}5x + 3$

2. a) Da W nach unten beschränkt ist, wäre hier eine nach oben geöffnete Parabel denkbar, deren Scheitel die y-Koordinate 2 hat, also z.B. $f(x) = x^2 + 2$

b) Nach oben und unten beschränkte Funktionen sind Sinus- und Kosinusfunktionen, hier also solche mit der Amplitude 2, z.B.: $g(x) = 2\sin x$

3. Es handelt sich um ein Produkt, also muss man jeden Faktor gleich Null setzen:

▸ $\ln x - 1 = 0$ => $\ln x = 1$ => $x_1 = e$

▸ $e^x - 2 = 0$ => $e^x = 2$ => $x_2 = \ln 2$

▸ $\frac{1}{x} - 3 = 0$ => $\frac{1}{x} = 3$ => $x_3 = \frac{1}{3}$

4. Extremstellen von F sind die Nullstellen von f, also:

$x = 0$: f hat einen VZW von + nach –, damit liegt ein Maximum von F vor.

$x \approx 2{,}25$: f hat einen VZW von – nach +, damit liegt ein Minimum von F vor.

Da $x = 1$ die untere Integrationsgrenze ist, gilt: $\mathbf{F(1) = 0}$ ($x = 1$ ist Nullstelle von F)

Das zwischen der x-Achse und dem Graphen von f liegende Flächenstück im Bereich $0 \leq x \leq 1$ ist annähernd ein Dreieck mit dem Inhalt 0,5 FE. Da von rechts nach links integriert wird (von 1 nach 0) und das Flächenstück unter der x-Achse liegt, ist der Integralwert positiv und es gilt: $\mathbf{F(0) = +0{,}5}$

Teil 2

1. a) **Symmetrie** Skript Kurvendiskussion 3.

$f(-x) = 2\cdot(-x)\cdot e^{-0,5\cdot(-x)^2} = -2x\cdot e^{-0,5\cdot x^2} = -f(x)$

Graph ist punktsymmetrisch zum Ursprung.

Grenzverhalten Skript Kurvendiskussion 4.

$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(2x\cdot e^{-0,5x^2}\right) = 0$

b) **Extrempunkte** Skript Kurvendiskussion 7.

$f'(x) = 2\cdot e^{-0,5x^2} + 2x\cdot e^{-0,5x^2}\cdot(-x) = 2e^{-0,5x^2}(1-x^2)$

Produktregel Skript §05 | Kettenregel Skript §11

$f'(x) = 0$

$1 - x^2 = 0$ Der Faktor $2e^{-0,5x^2}$ ist positiv und muss somit nicht betrachtet werden.

$x^2 = 1$

$x_1 = 1$ $y_1 = 2\cdot1\cdot e^{-0,5\cdot1^2} = 2\cdot e^{-0,5} = \frac{2}{\sqrt{e}}$

$x_2 = -1$ $y_1 = -\frac{2}{\sqrt{e}}$ (wegen der Punksymmetrie)

Art des Extrempunkts über VZ-Tabelle Skript Kurvendiskussion 7.

Beachte: $f'(x) = 2e^{-0,5x^2}(1-x)(1+x)$

		−1		1	
$2e^{-0,5x^2}$	+		+		+
$(1-x)$	+		+		–
$(1+x)$	–		+		+
f'(x)	**–**		**+**		**–**

Ergebnis: Tiefpunkt: $T\left(-1\middle|-\frac{2}{\sqrt{e}}\right)$ Hochpunkt: $H\left(1\middle|\frac{2}{\sqrt{e}}\right)$

c) Änderungsraten Skript §03

Mittlere Änderungsrate Steigung der Geraden (Sekante) zwischen den Punkten P(a|f(a)) und Q(b|f(b) – *hier: P(–0,5|f(–0,5)) und Q(0,5|f(0,5))*:

$f(b) = f(0,5) = 2\cdot0,5\cdot e^{-0,5\cdot0,5^2} = 1\cdot e^{-0,125}$ und $f(a) = f(-0,5) = -1\cdot e^{-0,125}$ (Punktsymm.)

$$m_s = \frac{f(b)-f(a)}{b-a} = \frac{f(0,5)-f(-0,5)}{0,5-(-0,5)} = \frac{e^{-0,125}-(-e^{-0,125})}{0,5+0,5} = \frac{2e^{-0,125}}{1} = 2e^{-0,125} \approx 1,76$$

Lokale Änderungsrate Steigung der Tangente an der Stelle x = 0, bzw. f'(0):

Mit $f'(x) = 2e^{-0,5x^2}(1-x^2)$ ergibt sich $m_T = f'(0) = f'(0) = 2e^{-0,5\cdot0^2}(1-0) = 2$

Abweichung:

Differenz: 2 – 1,76 = 0,24

Anteil: 0,24:2 = 0,12 = 12%

d) **Flächenberechnung (mit HDI)** Skript §20 Skript §21**:**

Funktionsterm f(x) ist in der Form $f(x) = g'(x) \cdot e^{g(x)}$, so dass sich für eine Stammfunktion F ergibt: $F(x) = e^{g(x)}$.

$F(x) = -2e^{-0,5x^2}$ Minus eins als Ausgleichsfaktor, da $g'(x) = -0,5 \cdot 2x = -x$

Also: $A(u) = \int_0^u f(x)dx = \left[-2e^{-0,5x^2}\right]_0^u = -2e^{-0,5u^2} + 2$

Grenzverhalten Skript Kurvendiskussion 4.

$\lim_{u\to+\infty} A(u) = \lim_{u\to+\infty}\left(-2e^{-0,5u^2} + 2\right) = 2$

Deutung: Die sich ins unendlich erstreckende Fläche zwischen x-Achse und Funktionsgraph hat den endlichen Inhalt 2.

e) **Schnittstellen:**

$f(x) = h(x)$ oder $d(x) = f(x) - h(x) = 0$

$d(x) = 2xe^{-0,5x^2} - \frac{2}{e^2}x = 2x(e^{-0,5x^2} - e^{-2})$

$d(x) = 0$ => $2x = 0$ => $x_1 = 0$

$e^{-0,5x^2} - e^{-2} = 0$ => $e^{-0,5x^2} = e^{-2}$ | ln… => $-0,5x^2 = -2$ => $x^2 = 4$

$x_{2|3} = \pm 2$

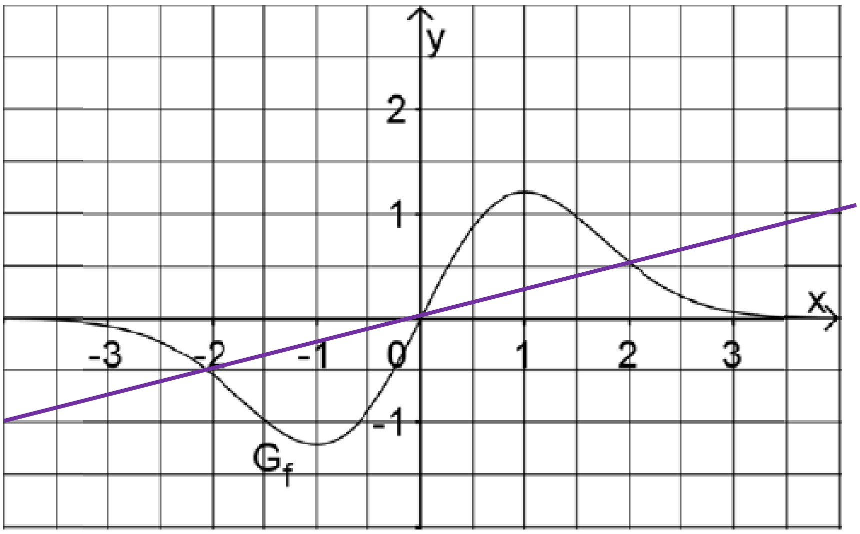


Abb. 2

Fläche zwischen 2 Funktionsgraphen Skript §21**:**

$$B = \int_0^2 d(x)dx = \int_0^2\left(2xe^{-0,5x^2} - \frac{2}{e^2}x\right)dx = \left[-2e^{-0,5x^2} - \frac{2}{e^2}\cdot\frac{1}{2}x^2\right]_0^2 =$$

$$= \left[-2e^{-0,5x^2} - \frac{1}{e^2}x^2\right]_0^2 = -2e^{-0,5\cdot 4} - \frac{1}{e^2}\cdot 4 - \left(-2e^{-0,5\cdot 0} - \frac{1}{e^2}\cdot 0\right) = -2e^{-2} - 4e^{-2} - (-2) =$$

$= -6e^{-2} + 2$ (*Berechnen* heißt *exakten Wert*, nicht gerundeten Wert *bestimmen*!)

2. a) Der Summand +c bewirkt eine Verschiebung des Graphen um c Einheiten in y-Richtung. Also bleiben die x-Koordinaten erhalten, zu den y-Koordinaten muss jeweils c addiert werden.

Hochpunkt: $H\left(1 \middle| \frac{2}{\sqrt{e}} + c\right)$ und $\lim_{x\to+\infty}(f(x) + c) = 0 + c = c$

b) α) **keine Nullstelle:** Der Graph ist um mehr als den Betrag der y-Koordinate des Tiefpunkts nach oben verschoben oder nach unten verschoben. Dann schneidet der Graph die x-Achse nicht.

Also muss gelten: $c > \frac{2}{\sqrt{e}}$ oder $c < -\frac{2}{\sqrt{e}}$

Man kann also einen beliebigen Wert für c angeben, der diese Bedingung erfüllt.
Z.B. $c = 100$

β) **genau eine Nullstelle:** Der vorliegende Graph mit $c = 0$ oder ein Graph dessen Hoch- bzw. Tiefpunkt auf der x-Achse liegt, erfüllt die Bedingung.
Man kann also einen der folgenden drei Werte für c angeben, der diese Bedingung erfüllt.

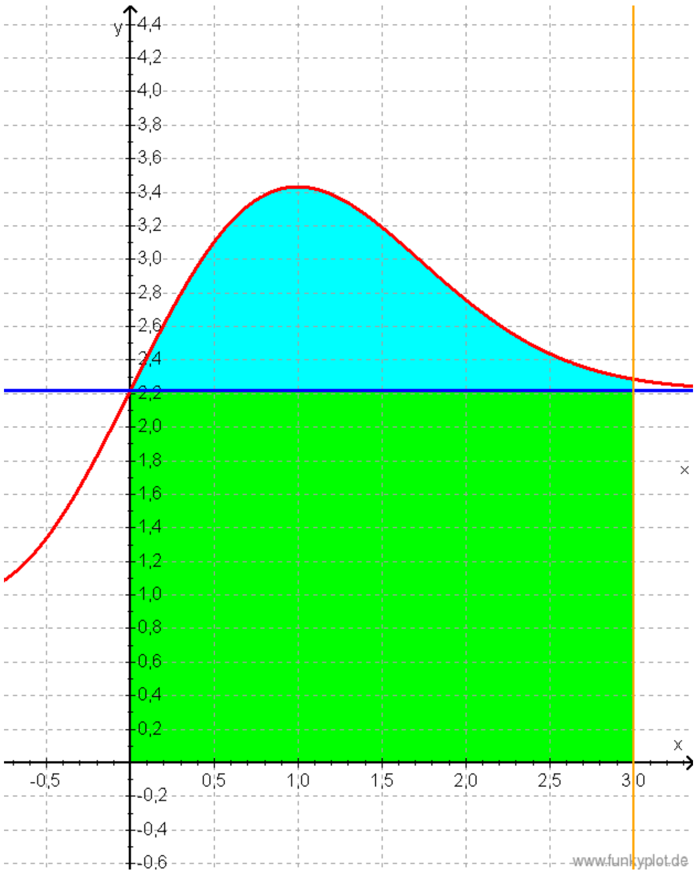
$c = 0 \qquad c = -\frac{2}{\sqrt{e}} \qquad c = \frac{2}{\sqrt{e}}$

γ) **genau zwei Nullstellen:** Der Graph ist um weniger als den Betrag der y-Koordinate des Tiefpunkts nach oben verschoben oder nach unten verschoben. Dann schneidet der Graph die x-Achse zweimal. Ausnahme: $c = 0$ (siehe β))

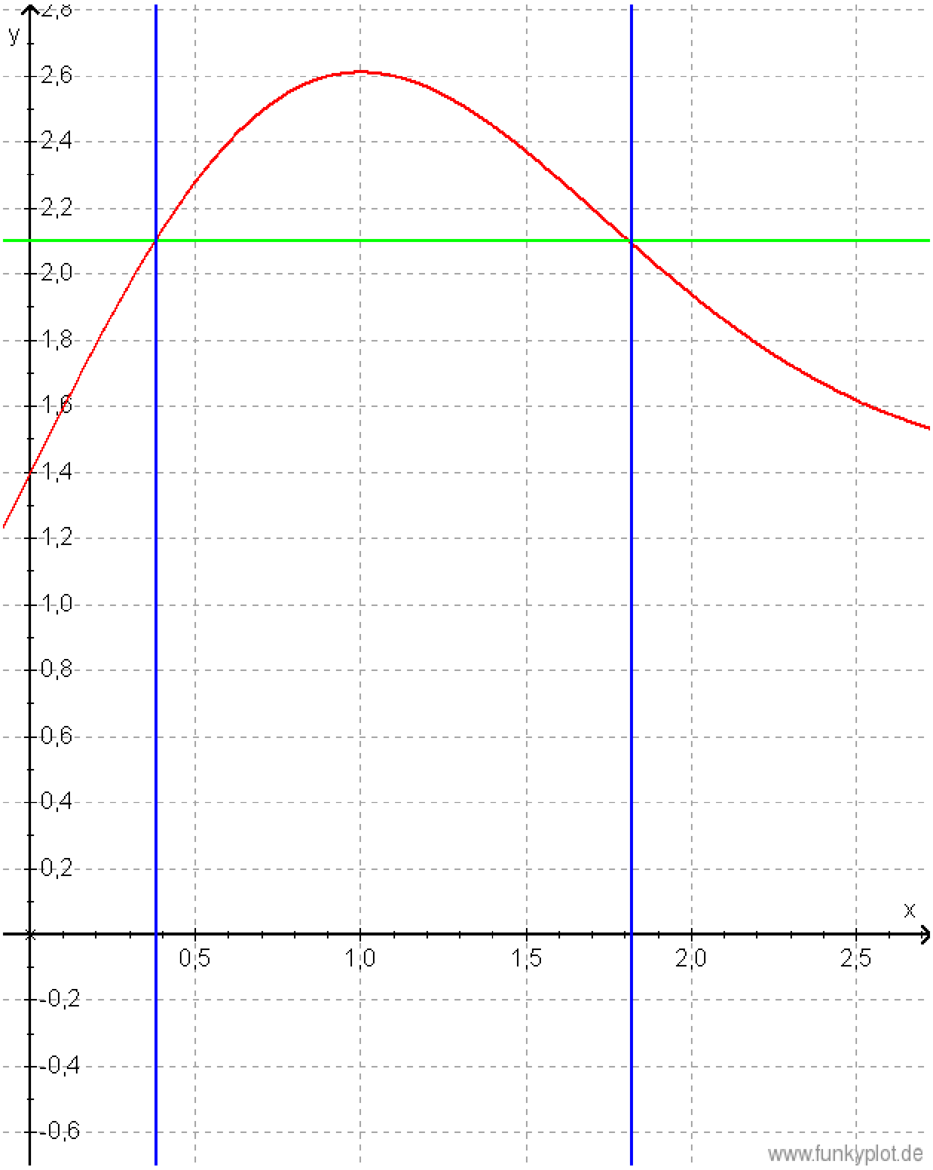
Also muss gelten: $-\frac{2}{\sqrt{e}} < c < \frac{2}{\sqrt{e}}$ aber $c \neq 0$

Man kann also einen beliebigen Wert für c angeben, der diese Bedingung erfüllt.
Z.B. $c = 1$

c) Wenn $c > 0$, dann ist der Graph in positive y-Richtung verschoben
Damit setzt sich der durch das Integral $\int_0^3 g_c(x)dx$ beschriebene Flächeninhalt aus dem Integral $\int_0^3 f(x)dx$ (türkis) und der Rechteckfläche mit den Seitenlängen c und 3 (grün) zusammen.



3. a) An der Skizze liest man ab (blaue Geraden): $x_1 \approx 0{,}4$ und $x_2 \approx 1{,}8$. Das bedeutet zwischen 4 und 18 Jahren nach 1955.



Zwischen den Jahren 1959 und 1973 beträgt die Geburtenziffer mindestens 2,1.

b) Da die Geburtenziffer weiter unter 2,1 bleibt, ist eine Bevölkerungsabnahme zu erwarten.

c) Dies ist die x-Koordinate des Wendepunktes. Diese ist nicht eindeutig abzulesen. Etwa bei x=1,7, also im Jahr 1972.

Da die negative Steigung betragsmäßig abnimmt, ist der Graph linksgekrümmt. Somit lässt es sich rechnerisch über das positive Vorzeichen der 2. Ableitung nachweisen.