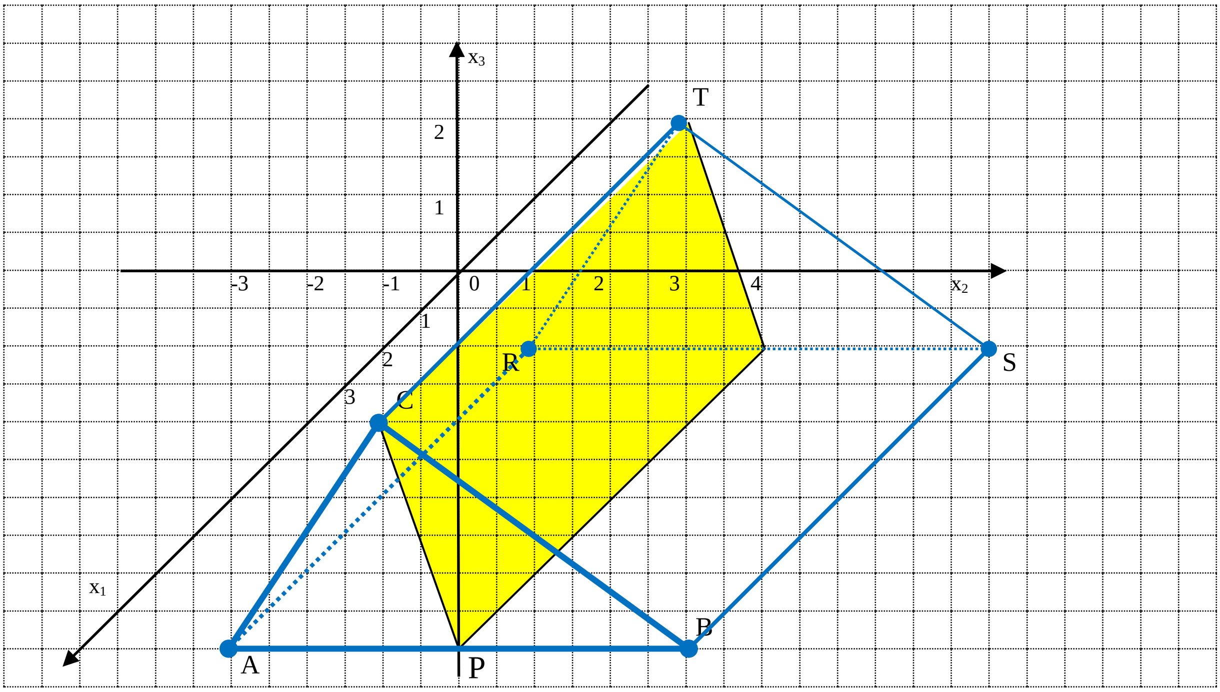
In einem kartesischen Koordinatensystem sind die Punkte A(10 | 2 | 0), B(10 | 8 | 0), C(10 | 4 | 3), R(2 | 2 | 0), S(2 | 8 | 0) und T(2 | 4 | 3) gegeben. Der Körper ABCRST ist ein gerades dreiseitiges Prisma mit der Grundfläche ABC, der Deckfläche RST und rechteckigen Seitenflächen.

a) *Zeichnen Sie das Prisma in ein kartesisches Koordinatensystem ein. Welche besondere Lage im Koordinatensystem hat die Grundfläche ABC? Berechnen Sie das Volumen des Prismas.*



ABC ist parallel zur x_2x_3-Ebene. Gelbe Figur gehört zu Aufgabe d)

V = G·h = (0,5·6·3)·8 = 72

Grundfläche G ist das Dreieck ABC mit der Grundlinie [AB], deren Länge 6 beträgt. Die Dreieckshöhe ist der Abstand von C und der x_1x_2-Ebene, auf der die Grundlinie liegt. Dieser Abstand ist die x_3-Koordinate von C, nämlich 3. Die Höhe des Prismas ist der Abstand der Punkte B und S, also die Differenz der x_1-Koordinaten 10 –2 = 8

b) Ermitteln Sie eine Gleichung der Ebene E, in der die Seitenfläche BSTC liegt, in Normalenform. [mögliches Ergebnis: E: $3x_2 + 4x_3 - 24 = 0$]

Ebene verläuft durch die 3 Punkte BST (oder andere drei der Punkte BSTC)
Aufhängepunkt: B

RV: $\overrightarrow{BS} = \begin{pmatrix} 2-10 \\ 8-8 \\ 0-0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \quad \vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \overrightarrow{BT} = \begin{pmatrix} 2-10 \\ 4-8 \\ 3-0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 \\ -4 \\ 3 \end{pmatrix}; \quad \vec{v} = \begin{pmatrix} 8 \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix}$

$\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ kann auch direkt im Koordinatensystem bestimmt werden.

$$\vec{u}\times\vec{v}=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}8\\4\\-3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\quad-0\\-(-3-0)\\4\quad-0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\3\\4\end{pmatrix}=\vec{n}$$

$$E:\quad \begin{pmatrix}0\\3\\4\end{pmatrix}\circ\left(\vec{x}-\begin{pmatrix}10\\8\\0\end{pmatrix}\right)=0$$

E: $3x_2 + 4x_3 - 24 = 0$

c) $\overrightarrow{CA}=\begin{pmatrix}10-10\\2-4\\0-3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\-2\\-3\end{pmatrix}$ $\qquad$ $\overrightarrow{CB}=\begin{pmatrix}10-10\\8-4\\0-3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\4\\-3\end{pmatrix}$

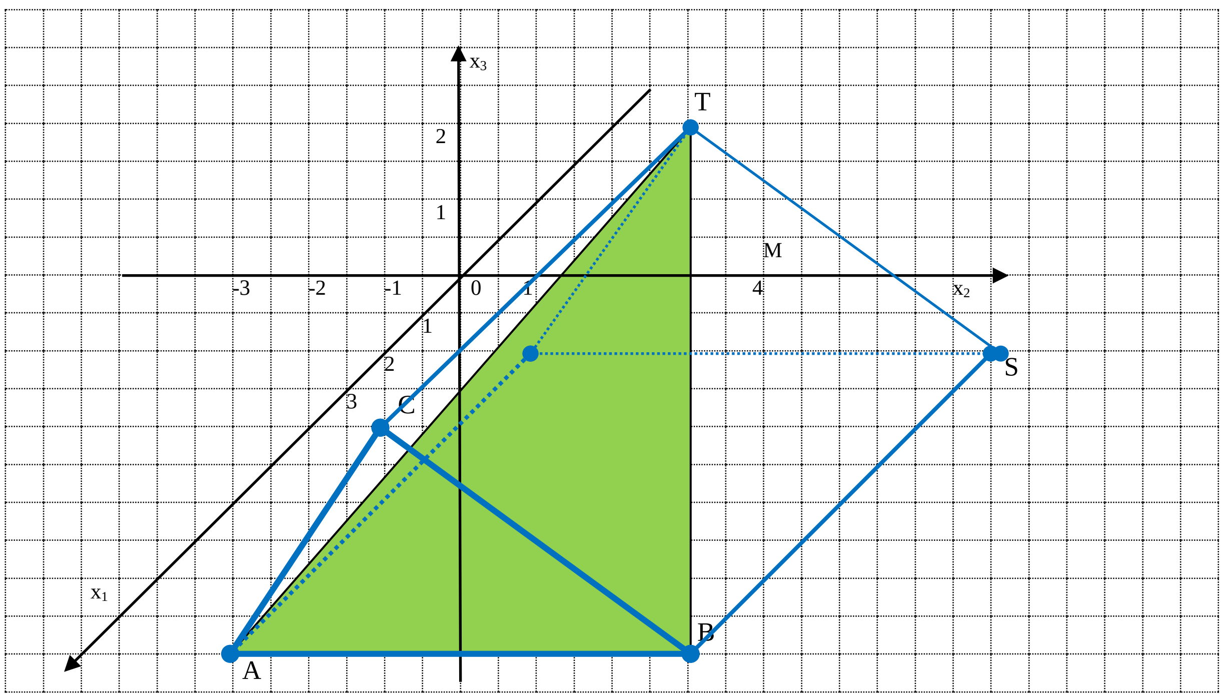
$$\cos\alpha=\frac{\overrightarrow{CA}\circ\overrightarrow{CB}}{\left|\overrightarrow{CA}\right|\cdot\left|\overrightarrow{CB}\right|}=\frac{\begin{pmatrix}0\\-2\\-3\end{pmatrix}\circ\begin{pmatrix}0\\4\\-3\end{pmatrix}}{\sqrt{0+4+9}\cdot\sqrt{0+16+9}}=\frac{-8+9}{\sqrt{13}\cdot 5}=\frac{1}{\sqrt{13}\cdot 5}$$

=> $\alpha = 86{,}82°$

d) *Die Ebene F enthält die Gerade CT und zerlegt das Prisma in zwei volumengleiche Teilkörper. Wählen Sie einen Punkt P so, dass er gemeinsam mit den Punkten C und T die Ebene F festlegt; begründen Sie Ihre Wahl. Tragen Sie die Schnittfigur von F mit dem Prisma in Ihre Zeichnung ein.*

P ist Mittelpunkt der Strecke [AB], da durch [PC] das Dreieck ABC in 2 flächengleiche Teildreiecke zerlegt wird. P(10 | 5 | 0)

e) *Die Punkte A, B und T legen die Ebene H fest; diese zerlegt das Prisma ebenfalls in zwei Teilkörper. Beschreiben Sie die Form eines der beiden Teilkörper. Begründen Sie, dass die beiden Teilkörper nicht volumengleich sind.*



Einer der beiden Teilkörper ist eine Pyramide mit Grundfläche ABC und Spitze T. Das Volumen dieser Pyramide ist 1/3 des Volumens des Prismas. Damit hat der andere Teilkörper ein doppelt so großes Volumen, nämlich 2/3 des Prismenvolumens.

Das Prisma ist das Modell eines Holzkörpers, der auf einer durch die x_1x_2-Ebene beschriebenen horizontalen Fläche liegt. Der Punkt M(5 | 6,5 | 3) ist der Mittelpunkt einer Kugel, die die Seitenfläche BSTC im Punkt W berührt.

f) Berechnen Sie den Radius r der Kugel sowie die Koordinaten von W.
[Teilergebnis: r = 1,5]
Ebene BSTC wurde in b) berechnet.

Lot von M auf E: l: $\vec{X} = \begin{pmatrix} 5 \\ 6,5 \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ (Aufhängepunkt ist M, RV ist der Normalenvektor von E)

l mit E schneiden: $3\cdot(6,5 + 3\lambda) + 4\cdot(3 + 4\lambda) - 24 = 0$

$19,5 + 9\lambda + 12 + 16\lambda - 24 = 0$

$19,5 + 9\lambda + 12 + 16\lambda - 24 = 0$

$7,5 = -25\lambda \qquad \lambda = -0,3$

$\vec{W} = \begin{pmatrix} 5 \\ 6,5 \\ 3 \end{pmatrix} - 0,3 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 5,6 \\ 1,8 \end{pmatrix}$ W(5 | 5,6 | 1,8)

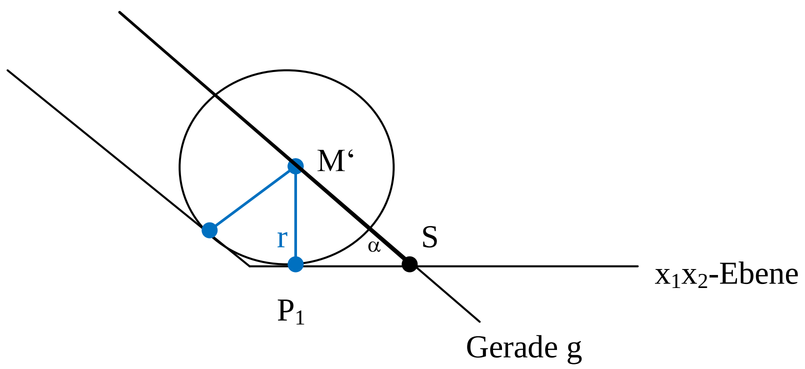
Radius: Abstand der Punkte W und M oder Abstand von M zur Ebene E (mit HNF)

$$r = \left|\overrightarrow{WM}\right| = \left|\begin{pmatrix} 5 - 5 \\ 6,5 - 5,6 \\ 3 - 1,8 \end{pmatrix}\right| = \left|\begin{pmatrix} 0 \\ 0,9 \\ 1,2 \end{pmatrix}\right| = \sqrt{0,9^2 + 1,2^2} = 1,5$$

g) Die Kugel rollt nun den Holzkörper hinab. Im Modell bewegt sich der Kugelmittelpunkt vom Punkt M aus parallel zur Kante auf einer Geraden g. Geben Sie eine Gleichung von g an und berechnen Sie im Modell die Länge des Wegs, den der Kugelmittelpunkt zurücklegt, bis die Kugel die x_1x_2-Ebene berührt.

g: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ 6,5 \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix}$ (Aufhängepunkt: M, RV: Verbindungsvektor von C und B aus c))

Skizze:



Der Mittelpunkt der Kugel bewegt sich auf der Gerade, bleibt dann in einer Entfernung, die so groß ist, wie die Länge der Strecke [M’S] vor dem Schnittpunkt S von g und der x_1x_2-Ebene liegen. Also schneidet man g mit der x_1x_2-Ebene (Gleichung: $x_3 = 0$), berechnet die Entfernung von Schnittpunkt S und M und subtrahiert die Länge $\overline{M'S}$ der Strecke [M‘S]. Diese erhält man mit der Beziehung $\frac{r}{\overline{M'S}} = \sin\alpha$ bzw. $\overline{M'S} = \frac{r}{\sin\alpha}$. α ist der Winkel zwischen den Ebenen E und der x_1x_2-Ebene.

$$\cos\alpha = \frac{\begin{pmatrix}0\\3\\4\end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}}{\sqrt{0+9+16}\cdot\sqrt{1}} = \frac{4}{5}$$ => $\alpha = 36{,}8699°$ => $\sin\alpha = 0{,}6$

Also: $\overline{M'S} = \frac{1{,}5}{0{,}6} = 2{,}5$

$(3 - 3\lambda) = 0$ => $\lambda = 1$

$$\vec{S} = \begin{pmatrix}5\\6{,}5\\3\end{pmatrix} + 1\cdot\begin{pmatrix}0\\4\\-3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}5\\10{,}5\\0\end{pmatrix} \qquad \left|\overrightarrow{MS}\right| = \left|\begin{pmatrix}5-5\\10{,}5-6{,}5\\0-3\end{pmatrix}\right| = \left|\begin{pmatrix}0\\4\\-3\end{pmatrix}\right| = \sqrt{16+9} = 5$$

Länge der Strecke: l = 5 – 2,5 = 2,5