Abbildung 1 zeigt modellhaft ein Dachzimmer in der Form eines geraden Prismas. Der Boden und zwei der Seitenwände liegen in den Koordinatenebenen. Das Rechteck ABCD liegt in einer Ebene E und stellt den geneigten Teil der Deckenfläche dar.

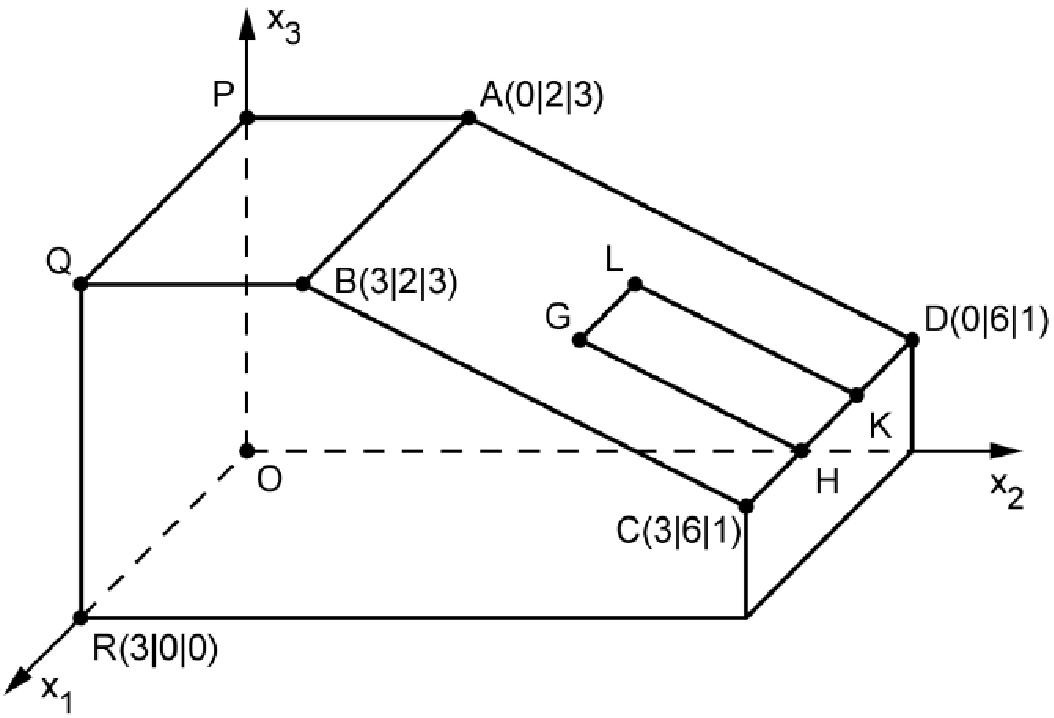

Abb. 1

a) *Bestimmen Sie eine Gleichung der Ebene E in Normalenform.*
[mögliches Ergebnis: E: $x_2 + 2x_3 - 8 = 0$]
Ebene verläuft durch die 3 Punkte ABD (oder andere drei der Punkte BSTC)
Aufhängepunkt: A

$$\text{RV: } \overrightarrow{AD} = \begin{pmatrix} 0-0 \\ 6-2 \\ 1-3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix}; \quad \vec{u} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \qquad \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AD} = \begin{pmatrix} 3-0 \\ 2-2 \\ 3-3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \quad \vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ kann auch direkt im Koordinatensystem bestimmt werden.

$$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \quad -0 \\ -(-0+1) \\ 0 \quad -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}; \quad \vec{n} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\text{E: } \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \circ \left(\vec{x} - \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \right) = 0$$

E: $x_2 + 2x_3 - 8 = 0$

b) *Berechnen Sie den Abstand des Punkts R von der Ebene E.*
Abstand Punkt-Ebene mit HNF Skript §10 | 5.

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}; \quad |\vec{n}| = \sqrt{1+4} = \sqrt{5} \qquad \text{E: } \frac{x_2 + 2x_2 - 8}{\sqrt{5}} = 0 \quad \text{(HNF)}$$

Einsetzen von R(3|0|0) in die linke Seite der HNF:

d(E;R) = $\left|\frac{0+2\cdot 0-8}{\sqrt{5}}\right| = \left|-\frac{8}{\sqrt{5}}\right| = \frac{8}{\sqrt{5}}$

Im Koordinatensystem entspricht eine Längeneinheit 1 m, d. h. das Zimmer ist an seiner höchsten Stelle 3 m hoch.

Das Rechteck GHKL mit G(2 | 4 | 2) hat die Breite $\overline{GL}$ = 1. Es liegt in der Ebene E, die Punkte H und K liegen auf der Geraden CD. Das Rechteck stellt im Modell ein Dachflächenfenster dar; die Breite des Fensterrahmens soll vernachlässigt werden.

c) *Geben Sie die Koordinaten der Punkte L, H und K an und bestimmen Sie den Flächeninhalt des Fensters.*

[Zur Kontrolle: $\overline{GH} = \sqrt{5}$]

Koordinaten der Punkte

L(1|4|2) gegenüber G liegt L in x_1-Richtung um –1 verschoben, die anderen Koordinaten sind dieselben wie die von G.

H(2|6|1) gegenüber C liegt H in x_1-Richtung verschoben und hat dieselbe x_1-Koordinate wie G, die anderen Koordinaten sind dieselben wie die von C.

K(1|6|1) gegenüber H liegt K in x_1-Richtung um –1 verschoben, die anderen Koordinaten sind dieselben wie die von H.

Flächeninhalt:

Es handelt sich um ein Rechteck mit der Länge $\overline{KH} = 1$ und der Breite $\overline{GH}$

$$\overline{GH} = \left|\overrightarrow{GH}\right| = \left|\begin{pmatrix} 2-2 \\ 6-4 \\ 1-2 \end{pmatrix}\right| = \left|\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}\right| = \sqrt{4+1} = \sqrt{5}$$

Fläche: A = $1\cdot\sqrt{5} = \sqrt{5}$

d) Durch das Fenster einfallendes Sonnenlicht wird im Zimmer durch parallele Geraden mit dem Richtungsvektor $\vec{v} = \begin{pmatrix} -2 \\ -8 \\ -1 \end{pmatrix}$ repräsentiert. Eine dieser Geraden verläuft durch den Punkt G und schneidet die Seitenwand OPQR im Punkt S. Berechnen Sie die Koordinaten von S sowie die Größe des Winkels, den diese Gerade mit der Seitenwand OPQR einschließt.

Schnittpunkt

g: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -2 \\ -8 \\ -1 \end{pmatrix}$ (Aufhängepunkt: G, RV angegeben, besser natürlich ohne „–“-Zeichen)

Die Seitenwand stellt die x_1-x_3-Ebene mit der Gleichung $x_2 = 0$ dar,
g in Ebenengleichung einsetzen: $(4 - 8\lambda) = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda = 0{,}5$

$\vec{S} == \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} + 0{,}5\cdot \begin{pmatrix} -2 \\ -8 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1{,}5 \end{pmatrix}$ S(1|0|1,5)

Winkel

Winkel zwischen Gerade und Ebene: Skript §12 | 3.

Normalenvektor der x_1-x_3-Ebene: $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$\sin\alpha = \left| \frac{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} -2 \\ -8 \\ -1 \end{pmatrix}}{1 \cdot \sqrt{4+64+1}} \right| = \left| \frac{-8}{\sqrt{69}} \right| \qquad \alpha = 74{,}38°$$

e) *Das Fenster ist drehbar um eine Achse, die im Modell durch die Mittelpunkte der Strecken [GH] und [LK] verläuft. Die Unterkante des Fensters schwenkt dabei in das Zimmer; das Drehgelenk erlaubt eine zum Boden senkrechte Stellung der Fensterfläche. Bestimmen Sie die Koordinaten des Mittelpunkts M der Strecke [GH] und bestätigen Sie rechnerisch, dass das Fenster bei seiner Drehung den Boden nicht berühren kann.*
[Teilergebnis: M(2 | 5 |1,5)]

Mittelpunkt der Strecke [GH]:

$$\vec{M} = \frac{\vec{G} + \vec{H}}{2} = \frac{\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ 1 \end{pmatrix}}{2} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 1{,}5 \end{pmatrix} \qquad M(2|5|1{,}5)$$

Drehung:

Wenn sich das Fenster dreht, bewegt sich der Punkt H auf einer Kreisbahn um G, deren Radius die Hälfte der Streckenlänge $\overline{GH}$, also $0{,}5 \cdot \sqrt{5}$ ist.
Der Mittelpunkt M des Kreises liegt 1,5 Meter (x_3-Koordinate) über dem Boden.
Es gilt: $1{,}5 > 0{,}5 \cdot \sqrt{5}$, damit berührt der Kreis, und so das Fenster, den Boden nicht.

Abbildung 2 zeigt ein quaderförmiges Möbelstück, das 40 cm hoch ist. Es steht mit seiner Rückseite flächenbündig an der Wand unter dem Fenster. Seine vordere Oberkante liegt im Modell auf der Geraden $k: \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 5{,}5 \\ 0{,}4 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \lambda \in IR$

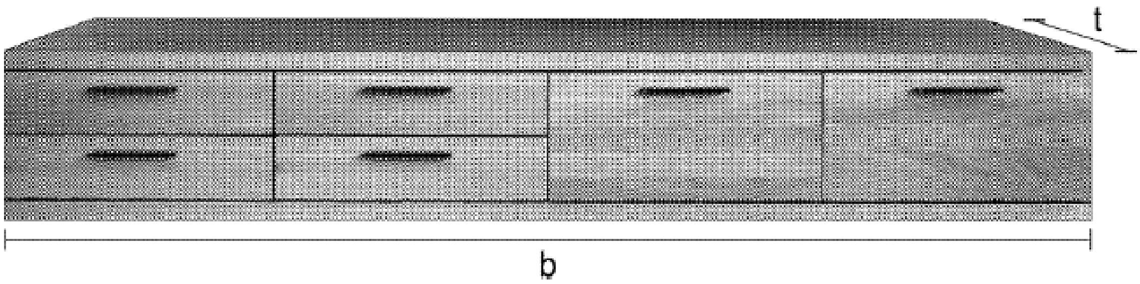

Abb. 2

f) Ermitteln Sie mithilfe von Abbildung 2 die Breite b des Möbelstücks möglichst genau. Bestimmen Sie mithilfe der Gleichung der Geraden k die Tiefe t des Möbelstücks und erläutern Sie Ihr Vorgehen.

Breite

Die Höhe im Bild misst 2,2 cm, die gesuchte Breite misst im Bild 14,4 cm, ist also 72/11-mal so groß wie die Höhe.

Es gilt 2,2 cm → 40cm

14,4 cm → x Also $x = 72/11 \cdot 40\text{cm} \approx 262$ cm

Tiefe

Dazu bestimmt man den Abstand eines Punktes der Geraden k zur Ebene W, an der das Möbelstück steht. Diese Ebene ist parallel zur x_1-x_3-Ebene im Abstand 6 (x_2-Koordinaten der Punkte C, D sowie H, K. Also W: $x_2 = 6$ bzw. W: $x_2 - 6 = 0$ (HNF)

Abstand Punkt-Ebene mit HNF Skript §10 | 5.

Einsetzen von (0|5,5|0,4) in die linke Seite der HNF:

$d(W;g) = |5{,}5-6| = |-0{,}5| = 0{,}5$

Also ist t = 50 cm

g) *Überprüfen Sie rechnerisch, ob das Fenster bei seiner Drehung am Möbelstück anstoßen kann.*

Wenn die Entfernung von M (Drehpunkt aus Aufgabe e) und der Geraden k größer als der Radius $r = 0{,}5\cdot\sqrt{5} = \sqrt{1{,}25}$ des Kreises ist, auf dem sich der Punkt G bewegt, berührt der Punkt G bei der Drehung das Möbelstück nicht.

Abstand Gerade – Punkt: Skript §11 | 2. Hilfsebene H, die M enthält und senkrecht zu k liegt

$$k: \vec{x} = \begin{pmatrix}0\\5{,}5\\0{,}4\end{pmatrix} + \lambda\cdot\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} \qquad M(2\,|\,5\,|\,1{,}5)$$

① $$\vec{n} = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} \quad\Rightarrow\quad H: \vec{n} = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} \circ \left(\vec{X} - \begin{pmatrix}2\\5\\1{,}5\end{pmatrix}\right) = 0 \quad => \quad H: x_1 - 2 = 0$$

② k in H: $0 + \lambda - 2 = 0 \quad\Rightarrow\quad \lambda = 2$

$$\lambda \text{ in k: } \vec{F} = \begin{pmatrix}0\\5{,}5\\0{,}4\end{pmatrix} + 2\cdot\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\5{,}5\\0{,}4\end{pmatrix} \quad\Rightarrow\quad F(2\,|\,5{,}5\,|\,0{,}4)$$

③ $$d(M;k) = \left|\overrightarrow{MF}\right| = \left|\begin{pmatrix}2-2\\5{,}5-5\\0{,}4-1{,}5\end{pmatrix}\right| = \left|\begin{pmatrix}0\\0{,}5\\-1{,}1\end{pmatrix}\right| = \sqrt{0{,}5^2+1{,}1^2} = \sqrt{1{,}46} > \sqrt{1{,}25}$$

Das Fenster stößt nicht an.