Teil 1

1. *Geben Sie zu den Funktionstermen jeweils den maximalen Definitionsbereich sowie einen Term der Ableitungsfunktion an.*

   a) f(x) = ln(x+3)

   Definitionsmenge:
   „BWL" – Logarithmus: Argument größer Null Skript Kurvendiskussion 1. Trainingsblatt 01
   $x + 3 > 0$ $x > -3$ $D =]-3; \infty[$

   Ableitung
   Logarithmus: Skript §13 | 2. Arbeitsblatt 04

   $$f'(x) = \frac{1}{x+3}$$

   b) g(x) = $\frac{3}{x^2-1}$

   Definitionsmenge:
   „BWL" – Bruch: Nenner nullsetzen Skript Kurvendiskussion 1. Trainingsblatt 01
   $x^2 - 1 = 0$ $x^2 = 1$ $x_{1|2} = \pm 1$ $D = IR\backslash\{-1; +1\}$

   Ableitung
   z.B: Quotientenregel: Skript §05 | 2. Arbeitsblatt 02

   $$f'(x) = \frac{(x^2-1)\cdot 0 - 3\cdot(2x)}{(x^2-1)^2} = -\frac{6x}{(x^2-1)^2}$$

2. *Geben Sie jeweils den Term einer in IR definierten Funktion an, die die angegebene Eigenschaft besitzt.*

   a) Der Graph der Funktion f hat den Hochpunkt (0|5)

   Am einfachsten ist hier eine nach unten geöffnete Parabel, die den Punkt (0|5) als Scheitelpunkt besitzt, also den Term $f(x) = -x^2 + 5$ hat.

   b) Die Funktion g ist an der Stelle x = 5 nicht differenzierbar.

   Differenzierbarkeit: Skript §03 | 3. Trainingsblatt 02
   Bei x = 5 muss also eine Knickstelle vorliegen oder eine Sprungstelle, aber keine Definitionslücke!!! Betragsfunktionen, haben meist an der Stelle, an der der Betragsinhalt Null wird, eine Knickstelle.
   Also zum Beispiel: $f(x) = |x - 5|$

3. *Gegeben ist die in IR definierte Funktion* $f : x \mapsto \sin(2x)$

   a) Geben Sie zwei benachbarte Nullstellen von f an.

   Sinusfunktion ist Nulle, wenn das Argument (hier: 2x) ein ganzzahliges Vielfaches von π ist

   also gilt für benachbarte Nullstellen z.B.: $2x = 0\cdot\pi$ bzw. $2x = 1\cdot\pi$

   $x_1 = 0$ $x_2 = 0{,}5\pi$

b) *Berechnen Sie den Wert des bestimmten Integrals* $\int_0^2 f(x)dx$.

$$\int_0^2 f(x)dx = \int_0^2 \sin(2x)dx = \left[\frac{1}{2}\cdot(-\cos 2x)\right]_0^2 = \left[-\frac{1}{2}\cos 2x\right]_0^2 =$$

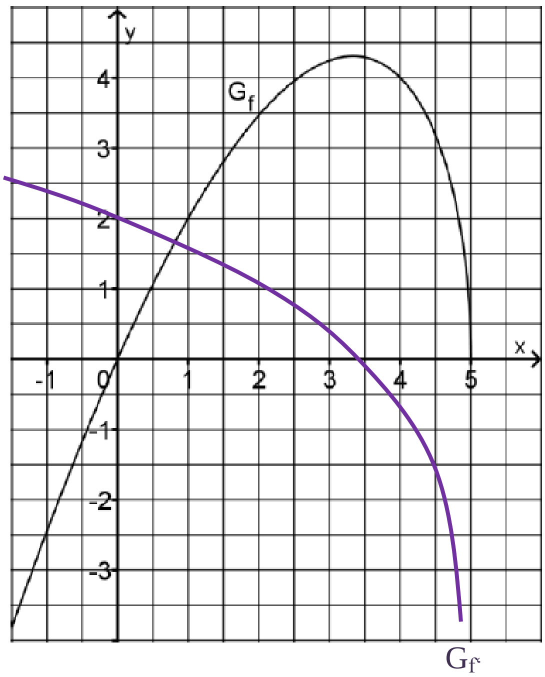
$$= -\frac{1}{2}\cos 2 - \left(-\frac{1}{2}\cos 0\right) = -\frac{1}{2}\cos 2 + \frac{1}{2} \approx -0{,}208 + 0{,}5 = 0{,}29$$

Beim Berechnen mit dem TR unbedingt auf RAD bzw. R stellen, nicht im Gradmaß arbeiten!

Warum stimmt der Wert dieses Integrals nicht mit dem Inhalt der Fläche überein, die für $0 \le x \le 2$ zwischen dem Graphen von f und der x-Achse liegt?

Der Wert des Integrals ist eine Flächenbilanz, also der Gesamtinhalt der Flächen zwischen Graph und x-Achse über der Achse minus dem Gesamtinhalt der Flächen zwischen Graph und x-Achse unter der Achse. Da f(x) im angegebenen Bereich eine Nullstelle bei $0{,}5\pi$ besitzt, und somit Flächenstücke ober- und unterhalb der x-Achse im angegebenen Bereich vorhanden sind, stimmt der Wert des Integrals nicht mit dem Flächeninhalt überein.

4. *Abbildung 1 zeigt den Graphen G_f einer in $]-\infty;5]$ definierten Funktion f.*
Skizzieren Sie in der Abbildung den Graphen der zugehörigen Ableitungsfunktion f'.
Berücksichtigen Sie dabei insbesondere einen Näherungswert für f'(0), die Nullstelle von f' und das Verhalten von f' für $x \to 5$.
Die Ableitung gibt die Steigung des Funktionsgraphen an, also gilt
für $f'(0) \approx 2$ (Im Graph ein Kästchen nach rechts, 2 nach oben bedeutet Steigung 2)
und für $x \to 5$: $f'(x) \to -\infty$
Außerdem hat der Graph von f bei $x \approx 3{,}4$ einen Hochpunkt, die Ableitung ist dort also Null.



Teil 2

1. Gegeben ist die Funktion $f: x \mapsto \frac{2e^x}{e^x+9}$ *mit Definitionsbereich IR. Abbildung 2 zeigt den Graphen von f.*

a) Zeigen Sie rechnerisch, dass G_f *genau einen Achsenschnittpunkt S besitzt, und geben Sie die Koordinaten von S an.*

SP mit der x-Achse: 2

Term nullsetzen, hier den Zähler Skript Kurvendiskussion 2.

$2e^x = 0$ keine Nullstelle, da $e^x > 0$

SP mit der y-Achse:

In f(x) Null einsetzen Skript Kurvendiskussion 2. 2

$f(0) = \frac{2e^0}{e^0+9} = \frac{2\cdot 1}{1+9} = \frac{2}{10} = 0{,}2$ Der Punkt S(0|0,2) ist somit der einzige Achsenschnittpunkt.

Hinweis: Da nachzuweisen ist, dass es nur einen SP gibt, muss eine Aussage über die Nullstellen getroffen werden. 3

b) Begründen Sie mithilfe des Funktionsterms, dass $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0$ *und* $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 2$ *gilt.*

Verbotene Rechnungen: Skript Kurvendiskussion 4.

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{\overset{\to 0}{2e^x}}{\underset{\to 0}{e^x}+9} = 0$$ 2

4

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{2e^x}{e^x+9} = \lim_{x\to+\infty} \frac{2e^x}{e^x\left(1+\frac{9}{e^x}\right)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{2}{\left(1+\underset{\to 0}{\frac{9}{e^x}}\right)} = 2$$ 6

Hinweis: Da der Grenzwert vorgegeben ist, ist eine Begründung in obiger Art nötig, es reicht also nicht, nur den Grenzwert hinzuschreiben.

c) Weisen Sie rechnerisch nach, dass Gf in IR streng monoton steigt.

Ableitung Quotientenregel: Skript §05 | 2. e-Funktion: Skript §12.

$$f'(x) = \frac{(e^x+9)\cdot 2e^x - 2e^x\cdot e^x}{(e^x+9)^2} = \frac{2e^{2x}+18e^x-2e^{2x}}{(e^x+9)^2} = \frac{18e^x}{(e^x+9)^2} > 0$$ 2

Da der Nenner ein Quadrat ist, der Zähler ein Produkt aus einer positiven Zahl mit ex ist, sind Zähler und Nenner beide positiv und die Ableitung somit auch. Da es keine Definitionslücken gibt, gilt: 5

f ist streng monoton zunehmend in D. 5

4

d) *Bestimmen Sie die Gleichung der Tangente an G_f im Achsenschnittpunkt S.*

Tangente: Skript Kurvendiskussion 6. Achsenschnittpunkt S(0|0,5) aus 1.a)

Alternative 1:

$x_o = 0$

$f(x_o) = 0,2$

$$f'(x_o) = \frac{18e^0}{(e^0+9)^2} = \frac{18\cdot 1}{(1+9)^2} = \frac{18}{100} = 0,18$$

Einsetzen in die Formel: $y = f'(x_o)\cdot(x - x_o) + f(x_o)$

$y = 0,18 \quad \cdot (x - 0) \ + 0,2$

$y = 0,18x + 0,2$

4

Alternative 2:

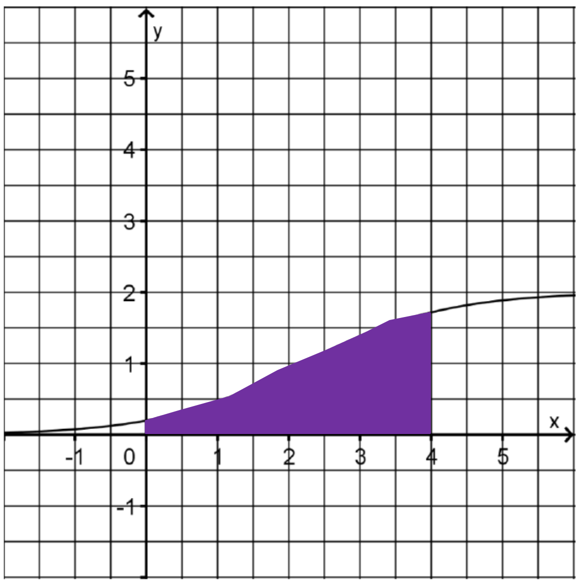
$$m = f'(0) = \frac{18e^0}{(e^0+9)^2} = \frac{18\cdot 1}{(1+9)^2} = \frac{18}{100} = 0,18$$ 1

m und Schnittpunkt S einsetzen in $y = m\,x + t$:

$0,2 = 0,18\cdot 0 + t \qquad \Rightarrow t = 0,2$

m und t einsetzen: $y = 0,18x + 0,2$

e) *Berechnen Sie den Inhalt der Fläche, die G_f mit den Koordinatenachsen und der Geraden x = 4 einschließt.*



$$A = \int_0^4 f(x)dx = \int_0^4 \frac{2e^x}{e^x+9}dx = 2\int_0^4 \frac{e^x}{e^x+9}dx =$$

$$= \left[2\ln(e^x+9)\right]_0^4 = 2\ln(e^4+9) - 2\ln(e^0+9) =$$

$$= 2\ln(e^4+9) - 2\ln 10 \approx 3,70$$

Hinweis zur Stammfunktion: Es handelt sich um einen Bruch, der Nenner ist kein Produkt. Somit ist der Bruch nicht aufteilbar und man muss überprüfen, ob der Zähler als Ableitung des Nenners geschrieben werden kann (2. Schritt).

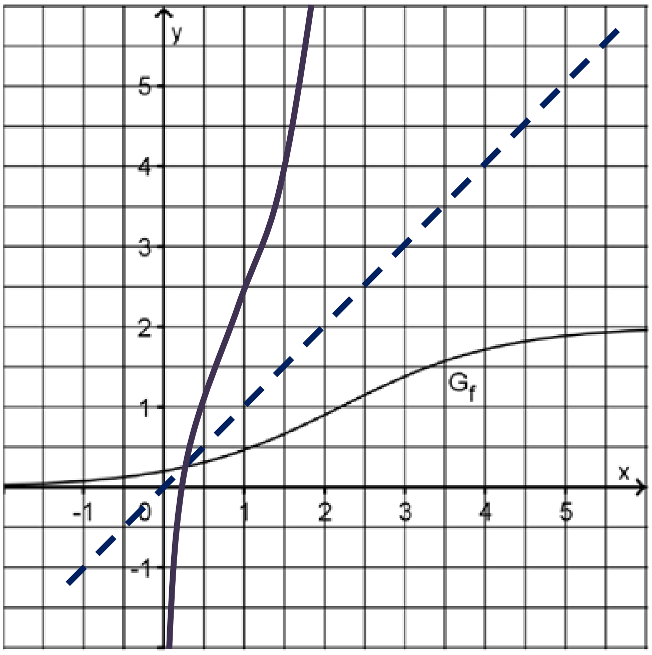
f) *Begründen Sie, dass f in IR umkehrbar ist. Geben Sie den Definitionsbereich und den Wertebereich der Umkehrfunktion f^{-1} an und zeichnen Sie den Graphen von f^{-1} in Abbildung 2 ein.*

Da f streng monoton (zunehmend) ist in D, ist f auch umkehrbar.

Es gilt: $D_{f-1} = W_f =]0;2[$ ergibt sich aus den Grenzwerten und der Monotonie

$W_{f-1} = D_f = IR$

Der Graph der Umkehrfunktion ergibt sich, wenn man den Graphen der Funktion an der Winkelhalbierenden des I. und III. Quadranten spiegelt.



2. Das Wachstum von Sonnenblumen der Sorte Alba lässt sich modellhaft mit-hilfe der Funktion f beschreiben. Beginnt man die Beobachtung zwei Wochen nach der Auskeimung einer Sonnenblume dieser Sorte, so liefert f(x) für $x \in [0;4]$ im Modell die Höhe der Blume in Metern. Dabei ist x die seit Beobachtungsbeginn vergangene Zeit in Monaten. In den Aufgaben 2.a) bis 2.d) werden ausschließlich Sonnenblumen der Sorte Alba betrachtet.

a) Berechnen Sie auf der Grundlage des Modells, um wie viele Zentimeter eine Sonnenblume innerhalb der ersten zwei Monate nach Beobachtungsbeginn wächst.

Wachstum in den ersten beiden Monaten bedeutet, dass die Länge zum Zeitpunkt 0 von der Länge zum Zeitpunkt 2 Monate abgezogen werden muss, also:

$l = f(2) - f(0) = \dfrac{2e^2}{e^2+9} - 0,2 \approx 0,451 - 0,2 = 0,251$ Sie wächst also 25,1 cm.

b) Berechnen Sie auf der Grundlage des Modells, wie viele Monate nach Beobachtungsbeginn eine Sonnenblume eine Höhe von 1,5 Metern erreicht. Beschreiben Sie, wie man den berechneten Wert graphisch überprüfen kann.

Rechnerischer Ansatz:

$f(x) = 1,5$

$\dfrac{2e^x}{e^x+9} = 1,5$ => $2e^x = 1,5 \cdot (e^x + 9)$ => $2e^x = 1,5e^x + 13,5$

=> $0,5e^x = 13,5 \,|\cdot 2$ => $e^x = 27 \,|\, \ln\ldots$ $x = \ln 27 \approx 3,2$

Es dauert also ca. 3, 2 Monate.

Graphisch:

Man legt eine Parallele zur x-Achse durch y = 1,5 und liest den entsprechenden Funktionswert von f ab. Alternativ kann man auch den Wert der Umkehrfunktion für x = 1,5 ablesen.

c) Im Modell gibt es einen Zeitpunkt x_M, zu dem die Blumen am schnellsten wachsen. Bestimmen Sie mithilfe von Abbildung 2 einen Näherungswert für x_M. Ermitteln Sie anschließend einen Näherungswert für die maximale Wachstumsrate in Zentimetern pro Tag.

Punkt mit maximalem Wachstum ist der Punkt, an dem die Steigung maximal ist, also der Wendepunkt. Dieser liegt bei $x_M \approx 2{,}3$.

Die Steigung des Graphen in diesem Punkt beträgt etwa 0,5. Damit ist die Wachstumsrate 0,5m pro Monat, also 50cm pro Monat oder $\frac{50}{30} = \frac{5}{3} \approx 1{,}7$, also bei ca. 1,7 cm pro Tag.

d) *Ein Biologe nimmt an, dass sich das Wachstum der Blumen vor Beobachtungsbeginn näherungsweise durch die Gleichung der Tangente aus Aufgabe 1.d) beschreiben lässt. Untersuchen Sie mithilfe einer Rechnung, ob diese Annahme damit in Einklang steht, dass vom Zeitpunkt des Auskeimens bis zum Beobachtungsbeginn etwa zwei Wochen vergehen.*

Beginn des Auskeimens bedeutet: Höhe ist Null. Bei der Annahme des Biologen wird diese Höhe durch die Gerade $y = 0{,}18x + 0{,}2$ beschrieben.

$0 = 0{,}18x + 0{,}2 \quad \Rightarrow \quad x \approx -1{,}1$

2 Wochen bedeutet 0,5 Monate, also müsste $x = -0{,}5$ gelten. Damit steht diese Annahme nicht im Einklang mit dieser Tatsache.

Haben zu Beobachtungsbeginn Sonnenblumen der Sorte Tramonto die gleiche Höhe wie Sonnenblumen der Sorte Alba, so erreichen von da an die Sonnenblumen der Sorte Tramonto im Vergleich zu denen der Sorte Alba jede Höhe in der Hälfte der Zeit.

Das Wachstum von Sonnenblumen der Sorte Tramonto lässt sich modellhaft mithilfe einer in IR definierten Funktion g beschreiben, die eine Funktionsgleichung der Form I, II oder III mit k ∈ IR besitzt:

$$I.\ \ y = \frac{2e^{x+k}}{e^{x+k}+9} \qquad II.\ \ y = k \cdot \frac{2e^{x}}{e^{x}+9} \qquad II.\ \ y = \frac{2e^{kx}}{e^{kx}+9}$$

Dabei ist x die seit Beobachtungsbeginn vergangene Zeit in Monaten und y ein Näherungswert für die Höhe einer Blume in Metern.

e) *Begründen Sie, dass weder eine Gleichung der Form I noch eine der Form II als Funktionsgleichung von g infrage kommt.*

Im Funktionsterm I. wird zu x eine Konstante k addiert, was eine Verschiebung in x-Richtung bedeutet. Unter der Voraussetzung gleicher Höhe zu Beobachtungsbeginn ergibt sich aber, dass der Graph nicht verschoben sein kann, sondern es sich in diesem Fall um denselben Graphen wie den von f handeln muss.

Im Funktionsterm II. wird jeder y-Wert mit der Konstante k multipliziert, d.h. die Sorte T. hat zu jedem Zeitpunkt x die k-fache Höhe wie die Sorte A, also auch zum Zeitpunkt x = 0. Da die Sorten aber zu diesem Zeitpunkt gleich hoch sein sollen, ergibt sich k = 1, was dazu führt, dass sie auch zu jedem anderen Zeitpunkt dieselbe Höhe haben.

f) *Die Funktionsgleichung von g hat also die Form III. Geben Sie den passenden Wert von k an.*

Die Aussage lässt sich für einen Funktionsterm g(x), der das Wachstum der Tramonto-Blumen beschreibt, folgendermaßen darstellen: $g(0{,}5x) = f(x)$

für x muss in g der halbe Wert eingesetzt werden, damit die gleiche Höhe, also der gleiche Funktionswert erhalten wird.

$g(0{,}5x) = \frac{2e^{k\cdot 0{,}5x}}{e^{k\cdot 0{,}5x}+9}$ für $k = 2$ erhält man f(x)