a) $\overrightarrow{CB} = \begin{pmatrix} 6+2 \\ -7-1 \\ 1+3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ -8 \\ 4 \end{pmatrix}$ $\quad\quad \overline{CB} = \left|\overrightarrow{CB}\right| = \sqrt{8^2 + (-8)^2 + 4^2} = 12$

4

$\overrightarrow{CA} = \begin{pmatrix} 1+2 \\ 7-1 \\ 3+3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 6 \end{pmatrix}$ $\quad\quad \overline{CA} = \left|\overrightarrow{CA}\right| = \sqrt{3^2 + 6^2 + 6^2} = 9$

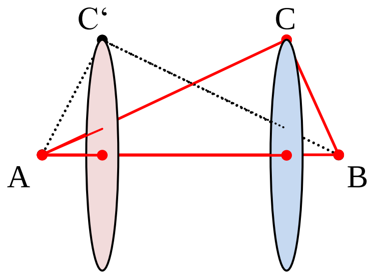
6

$\overrightarrow{CA} \circ \overrightarrow{CB} = 8 \cdot 3 + (-8) \cdot 6 + 4 \cdot 6 = 0 \quad\quad \overrightarrow{CA} \perp \overrightarrow{CB}$

Das Dreieck ist also an der Ecke C rechtwinklig und die kürzere Kathete [CA] hat die Länge 9.

3

b) Die Strecke [AB] Steht auf jeden der beiden Kreise senkrecht und verläuft durch ihre Mittelpunkte. Der eine Kreis verläuft durch den Punkt C, der andere verläuft durch einen bezüglich der Symmetrieebene von A und B zu C symmetrischen Punkt C‘.



7

3

Radius r des Kreises ist die Höhe h des Dreiecks. Es gilt: A = 0,5·g·h 7

Als Grundlinie g kann die Strecke [AB] und als Höhe die Höhe h verwendet werden, aber auch (da das Dreieck rechtwinklig ist) die beiden Katheten. 30

Damit gilt: $0{,}5 \cdot \overline{AB} \cdot h = 0{,}5 \cdot \overline{CB} \cdot \overline{CA}$ Beide Terme bestimmen den Flächeninhalt A und sind somit gleich.

h = $\dfrac{\overline{CB} \cdot \overline{CA}}{\overline{AB}}$

mit $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 6-1 \\ -7-7 \\ 1-3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -14 \\ -2 \end{pmatrix}$ $\quad\quad \overline{AB} = \left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{5^2 + (-14)^2 + (-2)^2} = 15$

ergibt sich r = h = $\dfrac{12 \cdot 9}{15} = 7{,}2$

c) Als Richtungsvektoren der Ebene verwendet man solche, die in Richtung der in a) berechneten Katheten-Vektoren verlaufen.

$\overrightarrow{CB} = \begin{pmatrix} 8 \\ -8 \\ 4 \end{pmatrix}$ (aus a)) => $\vec{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $\overrightarrow{CA} = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 6 \end{pmatrix}$ (aus a)) => $\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$

$$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2\cdot 2 - \ 2\cdot 1 \\ -[2\cdot 2 - \ 1\cdot 1] \\ 2\cdot 2 \ -(-2)\cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ -3 \\ 6 \end{pmatrix} \;\; => \vec{n} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

E: $\vec{n} \circ (\vec{x} - \vec{a}) = 0$ Als Aufpunkt kann jeder beliebige der Punkte A, B oder C verwendet werden. Hier wird der Punkt C verwendet.

E: $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \circ \left[\vec{x} - \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} \right] = 0$ E: $2x_1 + x_2 - 2x_3 - (-4 + 1 + 6) = 0$

E: $2x_1 + x_2 - 2x_3 - 3 = 0$

Die Grundfläche der Pyramide liegt in einer Ebene E. Ermitteln Sie eine Gleichung von E in Normalenform.

d) **Neigungswinkel:**

$$\overrightarrow{BS} = \begin{pmatrix} 11{,}5-6 \\ 4 \ +7 \\ -6-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5{,}5 \\ 11 \\ -7 \end{pmatrix} \quad \overline{BS} = \left|\overrightarrow{BS}\right| = \sqrt{5{,}5^2 + 11^2 + (-7)^2} = \sqrt{200{,}25}$$

$$\sin\varphi = \frac{\vec{n} \circ \overrightarrow{BS}}{|\vec{n}| \cdot |\overrightarrow{BS}|} = \frac{\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 5{,}5 \\ 11 \\ -7 \end{pmatrix}}{\sqrt{2^2 + 1^2 + (-2)^2} \cdot \sqrt{200{,}25}} = \frac{11+11+14}{3\cdot\sqrt{200{,}25}} = \frac{36}{3\cdot\sqrt{200{,}25}}$$

$\varphi = 57{,}99°$

Volumen:

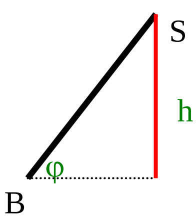
Volumen einer Pyramide (elementargeometrisch): V = $\frac{1}{3} G \cdot h$

Grundfläche ist das rechtwinklige Dreieck mit den Kathetenlängen 9 und 12 (s. a)):

G = $\frac{1}{2} \cdot 9 \cdot 12 = 54$

Höhe h: S. Abbildung:

h lässt sich auch über den Abstand von S zur Ebene E berechnen (HNF benötigt)



h (h ist Gegenkathete von φ)

Damit ist gilt h = $\overline{BS} \cdot \sin\varphi = \sqrt{200{,}25} \cdot \sin\varphi = = \sqrt{200{,}25} \cdot \frac{36}{3\cdot\sqrt{200{,}25}} = 12$

V = $\frac{1}{3} \cdot 54 \cdot 12 = 216$

Volumen einer dreiseitigen Pyramide mit Spatprodukt: V = $\frac{1}{6} \left| (\vec{a} \times \vec{b}) \circ \vec{c} \right|$

Wobei die verwendeten Vektoren diejenigen sind, die die Pyramide erzeugen, also

$\vec{a} = \overrightarrow{BA} = -\overrightarrow{AB} = -\begin{pmatrix} 5 \\ -14 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ 14 \\ 2 \end{pmatrix}$ aus b) $\quad \vec{b} = \overrightarrow{BC} = -\overrightarrow{CB} = -\begin{pmatrix} 8 \\ -8 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 \\ 8 \\ -4 \end{pmatrix}$ aus a)

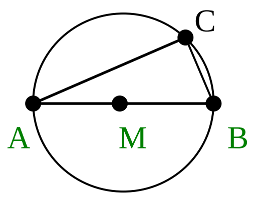
$\vec{c} = \overrightarrow{BS} = \begin{pmatrix} 5{,}5 \\ 11 \\ -7 \end{pmatrix}$ aus d)

$$\frac{1}{6}\left|\left(\begin{pmatrix} -5 \\ 14 \\ 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -8 \\ 8 \\ -4 \end{pmatrix}\right) \circ \begin{pmatrix} 5{,}5 \\ 11 \\ -7 \end{pmatrix}\right| = \frac{1}{6}\left|\begin{pmatrix} 14\cdot(-4) - 8\cdot 2 \\ -[-5\cdot(-4)-(-8)\cdot 2] \\ -5\cdot 8 \quad -14\cdot(-8) \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 5{,}5 \\ 11 \\ -7 \end{pmatrix}\right| =$$

$$= \frac{1}{6}\left|\begin{pmatrix} -72 \\ -36 \\ 72 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 5{,}5 \\ 11 \\ -7 \end{pmatrix}\right| = \frac{1}{6}\left| -72\cdot 5{,}5 - 36\cdot 11 + 72\cdot(-7) \right| = \frac{1}{6}\left| -1296 \right| = 216$$

e) Da die Grundfläche einer solchen Pyramide immer das Dreieck ABC ist und somit immer denselben Flächeninhalt hat, muss für gleiches Volumen die Höhe einer jeden Pyramide gleich sein. Eine Gerade muss also von E denselben Abstand haben wir S. Sie verläuft also parallel zu E im Abstand 12 (aus d))

f)



Da das Dreieck rechtwinklig ist, ist der Umkreis der Thaleskreis, dessen Mittelpunkt M auch Mittelpunkt der Hypotenuse ist. Zu zeigen ist, dass gilt: $\overrightarrow{MS} \perp E$

$\vec{M} = \frac{1}{2}(\vec{A} + \vec{B}) = \frac{1}{2}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 7 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 6 \\ -7 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 7 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3{,}5 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad \overrightarrow{MS} = \begin{pmatrix} 11{,}5 - 3{,}5 \\ 4 - 0 \\ -6 - 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 4 \\ -8 \end{pmatrix}$

Entweder: h $= \left|\overrightarrow{MS}\right| = \left|\begin{pmatrix} 8 \\ 4 \\ -8 \end{pmatrix}\right| = \sqrt{64 + 16 + 64} = \sqrt{144} = 12$ Höhe stimmt mit der Pyramidenhöhe überein, also gilt: $\overrightarrow{MS} \perp E$

Oder man zeigt, dass $\overrightarrow{MS}$ und der Normalenvektor von E linear abhängig sind:

$$\begin{pmatrix} 8 \\ 4 \\ -8 \end{pmatrix} = \lambda \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \begin{matrix} \Rightarrow \lambda = 4 \\ \Rightarrow \lambda = 4 \\ \Rightarrow \lambda = 4 \end{matrix} \quad \text{also gilt: } \overrightarrow{MS} \perp E$$

Kegelvolumen: $V_K = \frac{1}{3}\pi \cdot r^2 \cdot h$

Radius des Grundkreises ist die halbe Hypotenuse r = 15/2 = 7,5

$V_K = \frac{1}{3}\pi \cdot 7{,}5^2 \cdot 12 = 706{,}85$

Vergleich mit V_P

Differenz: $V_K - V_P = 706{,}85 - 216 = 490{,}85$

Anteil $\frac{490{,}85}{216} = 2{,}272 = 227{,}4\%$

Das Kegelvolumen ist also 227,4% größer als das Pyramidenvolumen.