

In einem kartesischen Koordinatensystem sind die Punkte A(0|60|0), B(-80|60|60) und C(-80|0|60) gegeben.

a) Bestimmen der Normalenform

$$\vec{AB} = \begin{pmatrix} -80 - 0 \\ 60 - 60 \\ 60 - 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -80 \\ 0 \\ 60 \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{u} = \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\vec{AC} = \begin{pmatrix} -80 - 0 \\ 0 - 60 \\ 60 - 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -80 \\ -60 \\ 60 \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{v} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix}$$

$$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \cdot (-3) - 3 \cdot 3 \\ -[-4 \cdot (-3) - 4 \cdot 3] \\ -4 \cdot 3 - 0 \cdot 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -9 \\ 0 \\ -12 \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{n} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$$

E: $\vec{n} \circ (\vec{x} - \vec{a}) = 0$

Als Aufpunkt kann jeder beliebige der Punkte A, B oder C verwendet werden. Hier wird der Punkt A verwendet.

E: $\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} \circ \left[\vec{x} - \begin{pmatrix} 0 \\ 60 \\ 0 \end{pmatrix} \right] = 0$

E: $3x_1 + 4x_3 - 0 = 0$

E: $3x_1 + 4x_3 = 0$

Besondere Lage

Es fehlt x_2 im Term, damit ist die Ebene parallel zur x_2 -Achse. Die Konstante ist 0, damit ist der Ursprung in E enthalten; also:

Die Ebene E enthält die x_2 -Achse.

Winkel

Normalenvektor der x_1x_2 -Ebene: $\vec{n}^* = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Winkel zwischen \vec{n} und \vec{n}^* ist der Winkel zwischen den Ebenen:

$$\cos \varphi = \frac{\vec{n}^* \circ \vec{n}}{|\vec{n}^*| \cdot |\vec{n}|} = \frac{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}}{\sqrt{1} \cdot \sqrt{9+16}} = \frac{4}{5}$$

$\varphi = 36,87^\circ$

b) Rechteck

- ① Gegenüberliegende Seitenvektoren sind identisch (1 Paar genügt; z.B. \vec{AB} und \vec{OC})
- ② Winkel bei O ist 90° (auch jeder andere Winkel – einer genügt)

$$\textcircled{1} \quad \vec{AB} = \begin{pmatrix} -80 \\ 0 \\ 60 \end{pmatrix} \text{ (aus a)} \qquad \vec{OC} = \begin{pmatrix} -80 \\ 0 \\ 60 \end{pmatrix} \text{ (Ortsvektor von C)}$$

Also: $\vec{AB} = \vec{OC}$

- ② Winkel zwischen \vec{OA} und \vec{OC} : Da nur nach 90° gefragt ist, muss nur das Skalarprodukt bestimmt werden.

$$\vec{OA} \circ \vec{OC} = \begin{pmatrix} 0 \\ 60 \\ 0 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} -80 \\ 0 \\ 60 \end{pmatrix} = 0 \qquad \text{Also } \vec{OA} \perp \vec{OC}$$

Damit bilden die Punkte OABC ein Rechteck.

Flächeninhalt:

Es gibt 2 Lösungsmöglichkeiten: ① elementargeometrisch (leichter) oder ② vektoriell

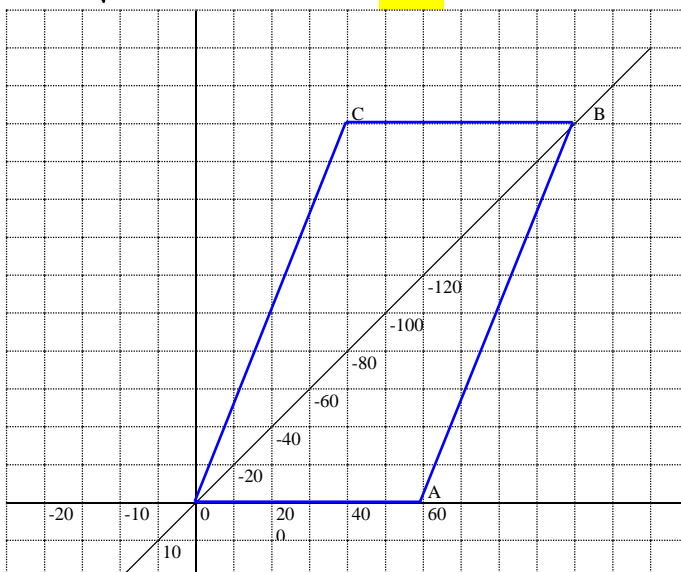
- ① **Elementargeometrisch:** $A = l \cdot b$

Länge und Breite sind die Beträge der Seitenvektoren \vec{OA} und \vec{OC}

$$A = |\vec{OA}| \cdot |\vec{OC}| = \left| \begin{pmatrix} 0 \\ 60 \\ 0 \end{pmatrix} \right| \cdot \left| \begin{pmatrix} -80 \\ 0 \\ 60 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{60^2} \cdot \sqrt{(-80)^2 + 60^2} = 60 \cdot 100 = 6000$$

- ② **Vektoriell:** Betrag des Vektorprodukts der Vektoren, die das Parallelogramm (hier: Rechteck) erzeugen, ist die Maßzahl des Flächeninhalts.

$$A = |\vec{OA} \times \vec{OC}| = \left| \begin{pmatrix} 0 \\ 60 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -80 \\ 0 \\ 60 \end{pmatrix} \right| = \left| \begin{pmatrix} 60 \cdot 60 - 0 \cdot 0 \\ -[0 \cdot 60 - (-80) \cdot 0] \\ 0 \cdot 0 - (-80) \cdot 60 \end{pmatrix} \right| = \left| \begin{pmatrix} 3600 \\ 0 \\ -4800 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{3600^2 + (-4800)^2} = 6000$$



c) Berechnet wird nur die auf die x_1x_2 -Ebene projizierte Ebene, also die Ansicht von „oben“.

Da der Winkel zwischen Rechteck und der x_1x_2 -Ebene $36,87^\circ$ beträgt (vgl. a)), haben die projizierten Rechteckseiten l^* und b^* (aus b) unter ①) die Längen:

$l^* = l$ Vektor \overrightarrow{OA} verläuft in x_2 -Richtung, wird also nicht projiziert

$b^* = b \cdot \cos 36,87^\circ = b \cdot 0,8$ wird projiziert – der Wert 0,8 für $\cos \varphi$ stammt aus der Aufgabe a) unter Winkel

Damit gilt für den Inhalt A^* der Fläche:

$$A^* = l^* \cdot b^* = l \cdot b \cdot 0,8 = l \cdot b \cdot 0,8 = A \cdot 0,8 = 6000 \cdot 0,8 = 4800$$

d) Abstand Ebene E – Gerade:

$$E: 3x_1 + 4x_3 = 0 \quad |\vec{n}| = \begin{vmatrix} 3 \\ 0 \\ 4 \end{vmatrix} = \sqrt{9+16} = 5$$

$$E: \frac{3x_1 + 4x_3}{5} = 0 \text{ (HNF)}$$

g in linke Seite einsetzen:

$$d(g;E) = \left| \frac{3 \cdot (-20 + 4\lambda) + 4 \cdot (40 - 3\lambda)}{5} \right| = \left| \frac{-60 + 12\lambda + 160 - 12\lambda}{5} \right| = \left| \frac{100}{5} \right| = 20$$

e) Entfernung zweier Punkte:

$$d(M;X) = \left| \vec{X} - \vec{M} \right| = \left| \begin{pmatrix} -20 \\ 40 \\ 40 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ -3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -40 \\ 30 \\ 30 \end{pmatrix} \right| = \left| \begin{pmatrix} 20 \\ 10 \\ 10 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ -3 \end{pmatrix} \right| =$$

$$= \sqrt{(20 + 4\lambda)^2 + (10 + 5\lambda)^2 + (10 - 3\lambda)^2} =$$

$$= \sqrt{400 + 160\lambda + 16\lambda^2 + 100 + 100\lambda + 25\lambda^2 + 100 - 60\lambda + 9\lambda^2} =$$

$$= \sqrt{50\lambda^2 + 200\lambda + 600}$$

Damit der Abstand minimal wird, muss der Radikant (unter der Wurzel) minimal werden. Das Minimum ermittelt man über die Ableitung. Zum Ableiten könnte man auch den Term unter der Wurzel in der drittletzten Zeile verwenden, so ist die Umformung der letzten beiden Zeilen nicht nötig.

$$f(\lambda) = 50\lambda^2 + 200\lambda + 600$$

$$f'(\lambda) = 100\lambda + 200$$

oder: $f'(\lambda) = 2 \cdot (20 + 4\lambda) \cdot 4 + 2 \cdot (10 + 5\lambda) \cdot 5 + 2 \cdot (10 - 3\lambda) \cdot (-3) =$ Kettenregel

$$= 160 + 32\lambda + 100 + 50\lambda - 60 + 18\lambda = 100\lambda + 200$$

$$f''(\lambda) = 0$$

$\lambda = -2$ Minimum, da Term Funktionsterm einer nach oben geöffneten Parabel ist

Oder: $f''(\lambda) = 100 \quad f''(-2) = 100 > 0$ Minimum

Einsetzen in $d(M;X)$:

$$d_{\min} = \sqrt{50 \cdot (-2)^2 + 200 \cdot (-2) + 600} = \sqrt{200 - 400 + 600} = \sqrt{400} = 20$$

- f) V_O : Ostrichtung ist x_2 –Richtung also am Hang parallel zur x_1x_2 -Ebene. Damit muss man vom Mittelpunkt aus nur 15 Einheiten in x_2 -Richtung gehen, d.h., zur x_2 -Koordinate 15 addieren:

$$V_O(-40 \mid 45 \mid 30)$$

- V_N : Nordrichtung ist negative x_1 –Richtung, aber geneigt. Um auf dem Hang 15m in Nordrichtung zu gehen, geht man auf der in die x_1x_2 -Ebene projizierten Ebene $15m \cdot \cos\varphi = 15m \cdot 0,8 = 12$ m laufen (s. Aufgabe c)). Damit muss man von der x_1 -Koordinate 12 subtrahieren.

Außerdem liegt der Punkt um $15m \cdot \sin\varphi = 15m \cdot 0,6 = 9m$ höher, also muss man zur x_3 -Koordinate 9 addieren:

$$V_N(-52 \mid 30 \mid 39)$$