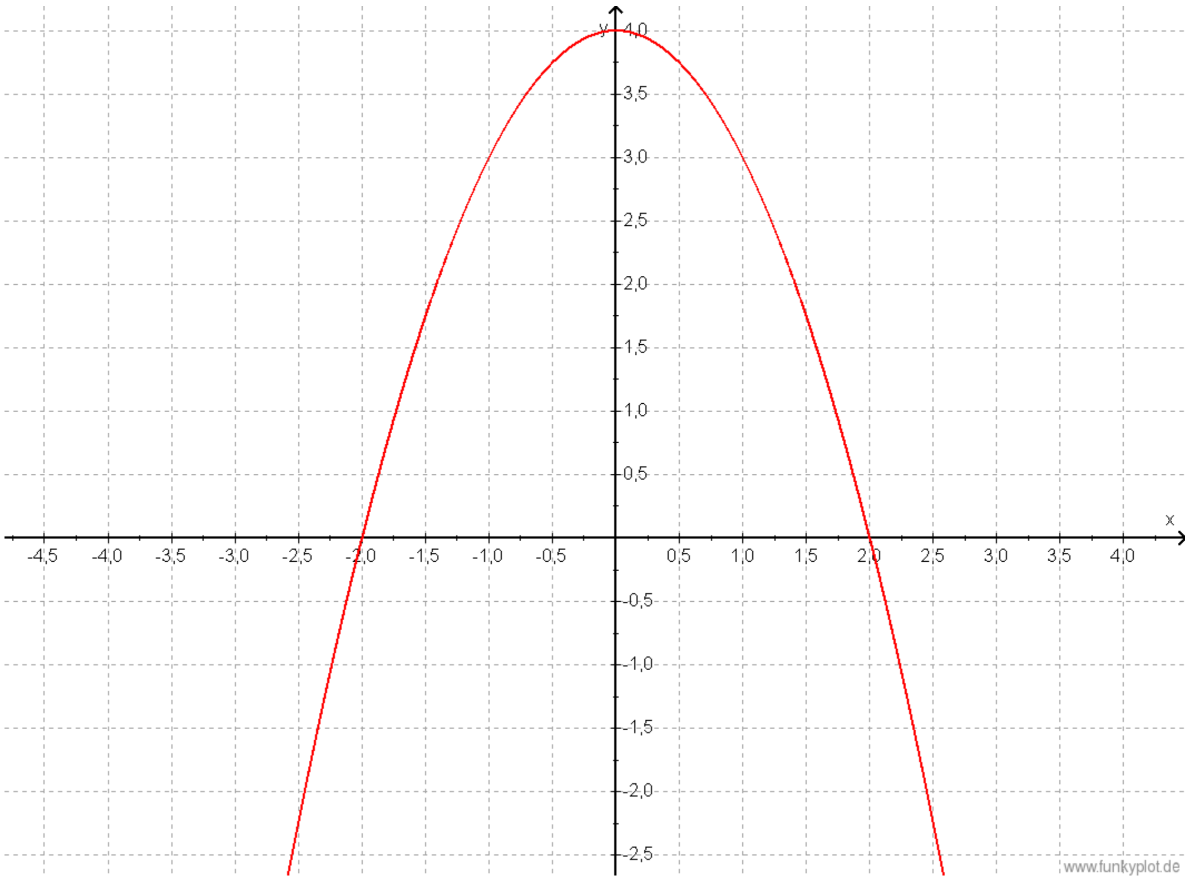
Teil 1

1. **Graph**



Flächenstück

Hierfür sollte man zunächst die Nullstellen berechnen

Nullstellen von f: $x_{1|2} = \pm 2$

Also: $A = \int_{-2}^{2} (4 - x^2)dx = \left[4x - \frac{x^3}{3}\right]_{-2}^{2} = \left[4 \cdot 2 - \frac{2^3}{3}\right] - \left[4 \cdot (-2) - \frac{(-2)^3}{3}\right] = 10\frac{2}{3}$

2. **Definitionsmenge**

„BWL" – Wurzel: Radikant größer gleich Null setzen

Skript Kurvendiskussion 1. Trainingsblatt 01

$x \geq 0$ D = [0; ∞[

Stammfunktion

f(x) = $3x^{0,5}$ => F(x) = $3 \cdot \frac{x^{1,5}}{1,5} + C = 2x^{1,5} + C = 2\sqrt{x^3} + C$

C bestimmen mit der Angabe, dass der Graph den Punkt P(1|4) enthält:

$4 = 2\sqrt{2^3} + C$

$C = 4 - 2\sqrt{8} = 4 - 4\sqrt{2}$

Damit gilt: F(x) = $= 2\sqrt{x^3} + 4 - 4\sqrt{2}$

3. $f: x \mapsto \dfrac{\sin x}{x^2}$

a) **Nullstellen**

Bedingung: f(x) = 0 Ein Bruch ist Null, wenn sein Zähler Null ist, also sinx = 0

Nullstellen sind damit alle Vielfachen von π

Nullstellen: $x_k = k\pi$ mit $k \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}$

b) **Symmetrieverhalten** Skript Kurvendiskussion 3.

$$f(-x) = \frac{\sin(-x)}{(-x)^2} = \frac{-\sin x}{x^2} = -\frac{\sin x}{x^2} = -f(x)$$

Der Graph ist punktsymmetrisch zum Ursprung.

Grenzwerte Verbotene Rechnungen: Skript Kurvendiskussion 4.

$f(-x) = \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\sin x}{x^2} = 0$ Der Zähler nimmt Zahlen von –1 bis 1 an, der Nenner geht nach ∞. Es liegt also die „verbotene Rechnung“ $\dfrac{a}{\infty}$ vor.

c) **Ableitung** Quotientenregel: Skript §05 | 2. | Ableitung Sinus/Cosinus: Skript §10

$$f'(x) = \frac{x^2 \cdot \cos x - 2x \cdot \sin x}{(x^2)^2} = \frac{x \cdot (x\cos x - 2\sin x)}{x^4} = \frac{x\cos x - 2\sin x}{x^3}$$

4. Rationale Funktionen: Skript §02

Polstelle ohne VZW bei x = –1: Nenner enthält den Faktor $(x + 1)^2$ bzw. als Exponenten auch zunächst jede andere gerade Zahl (4;6;8;…)

Horizontale Asymptote y = 2: Zählerpolynom muss denselben Grad wie das Nennerpolynom besitzen und den Vorfaktor 2.

Da über die Nullstellen keine Aussage getroffen wurde, kann der andere Zählerfaktor als $(x – a)^2$ gewählt werden, wobei a nicht den Wert –1 annimmt, da der Faktor sonst kürzbar wäre. Hier wird a = 0 gewählt, so dass der Zähler $2x^2$ wird.

$$f(x) = \frac{2x^2}{(x+1)^2}$$

Teil 2

1. a) $f(x) = 6 \cdot e^{-0,5x} + x$

$f'(x) = 6 \cdot e^{-0,5x} \cdot (-0,5) + 1 = -3 \cdot e^{-0,5x} + 1$

$f''(x) = -3 \cdot e^{-0,5x} \cdot (-0,5) = 1,5 \cdot e^{-0,5x} > 0$

Monotonieverhalten:

$f'(x) = 0$

$-3 \cdot e^{-0,5x} + 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad 3 \cdot e^{-0,5x} = 1 \quad \Rightarrow e^{-0,5x} = \frac{1}{3} \quad |\ln\ldots$

$\Rightarrow \quad -0,5x = \ln\frac{1}{3} \quad \Rightarrow \quad x = -2\ln\frac{1}{3} \quad = 2\ln 3 \approx 2,2$

$y = f(-2\ln\frac{1}{3}) = 6 \cdot e^{\ln\frac{1}{3}} - 2\ln\frac{1}{3} = 6 \cdot \frac{1}{3} - 2\ln\frac{1}{3} = 2 - 2\ln\frac{1}{3} = 2 + 2\ln 3 \approx 4,2$

		2ln3	
f'(x)	–		+

z.B. 0 einsetzen: $f'(0) = -3 + 1 = -2 < 0$

G_F ist streng monoton steigend für $x \in]-\infty; 2\ln 3]$

G_F ist streng monoton fallend für $x \in [2\ln 3; \infty[$

Tiefpunkt T(2ln3|2+2ln3)

Krümmungsverhalten:

Hierzu muss das VZ der 2. Ableitung von f betrachtet werden.

Es gilt: $f''(x) > 0$

G_F ist linksgekrümmt für $x \in IR$

b) $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} (6e^{-0,5x} + x) = +\infty$ Verbotene Rechnungen mit x ist schwächer als e

Da der Summand $6 \cdot e^{-0,5x}$ für $x \to +\infty$ gegen Null geht, spielt nur noch der 2. Summand x eine Rolle. Der Graph von f nähert sich also dem Graphen von y = x an, somit ist y=x Asymptote.

Oder Definition (→ Skript §02 Punkt 4.) anwenden mit a(x) = x

$\lim\limits_{x \to -\infty} [f(x) - a(x)] = \lim\limits_{x \to -\infty} \left[(6e^{-0,5x} + x) - x\right] = \lim\limits_{x \to -\infty} \left[6e^{-0,5x}\right] = 0$

Damit ist der Graph von a Asymptote.

c) Tangente:

$f'(x) = -3 \cdot e^{-0,5x} + 1$

$m = f'(0) = -3 \cdot e^{-0,5 \cdot 0} + 1 = -3 \cdot e^{0} + 1 = -3 \cdot 1 + 1 = -2$

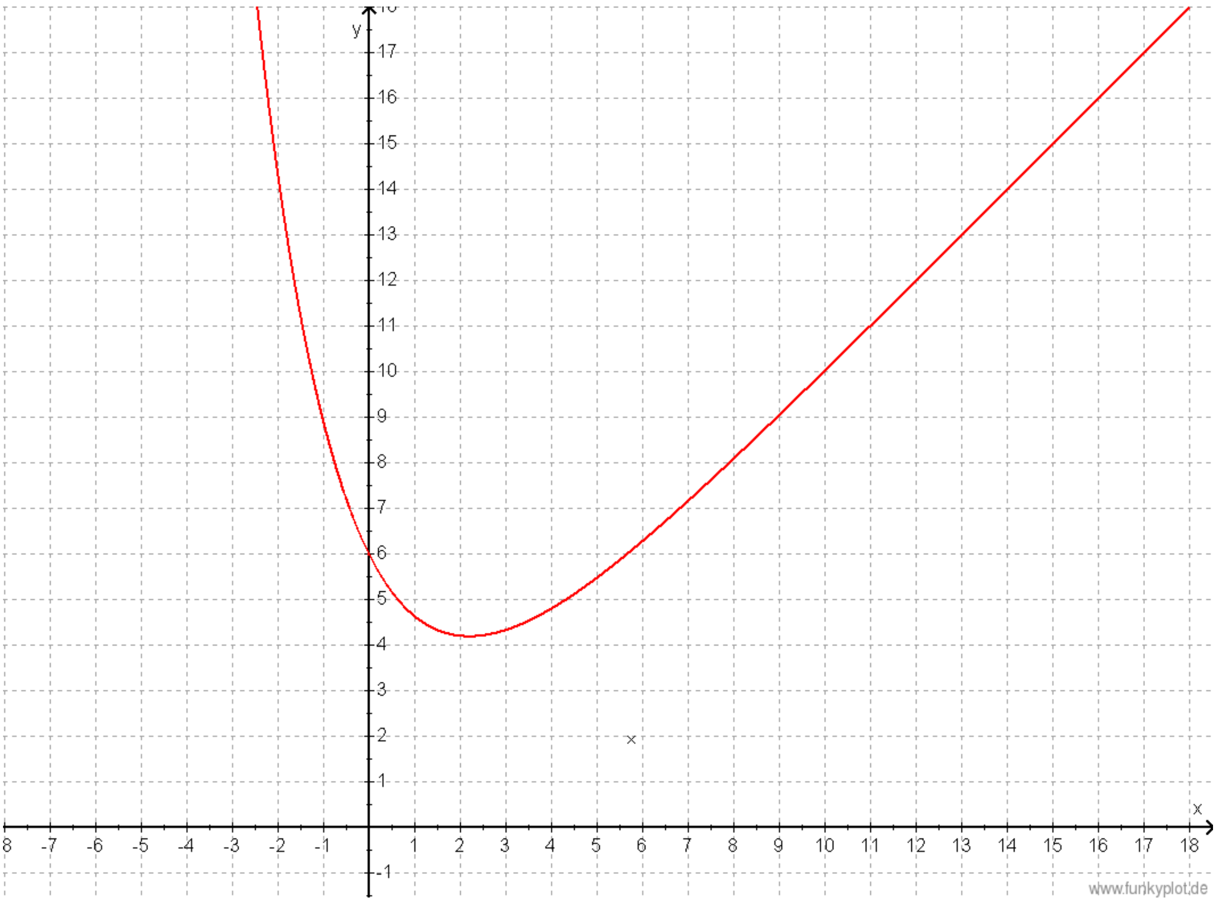
$y = f(0) = 6 \cdot e^{-0,5 \cdot 0} + 0 = 6 \cdot 1 + 0 = 6 \qquad P(0|6)$

m und die Koordinaten von P werden in die Gleichung y = mx + t eingesetzt, um t zu ermitteln.

$6 = -2 \cdot 0 + t \qquad t = 6$

Also: $y = -2x + 6$

Graph



2. a) Der Graph wird zunächst um den Faktor 2 in x-Richtung gestreckt, dann an der y-Achse gespiegelt, dann um den Faktor 6 in y-Richtung gestreckt und um 1,5 in y-Richtung verschoben.

   b) Die Funktion h ist streng monoton abnehmend und nähert sich dem Grenzwert 1,5 an. Damit nimmt die Schadstoffausstoßrate der Maschine kontinuierlich ab und nähert sich dem Wert 1,5mg pro Minute an, wenn die Maschine länger läuft.

   c) $A = \int_0^5 h(x)dx = \int_0^5 \left(6\cdot e^{-0,5x}+1,5\right)dx = \left[6\cdot(-2)e^{-0,5x}+1,5x\right]_0^5 =$

   $= \left(-3e^{-2,5}+7,5\right)-\left(-3e^0+0\right) = -3e^{-2,5}+10,5 \approx 10,25$

   Es werden also in den ersten 5 Minuten nach dem Start 10,25mg Schadstoff ausgestoßen.

3. a) Kurvenscharen: Skript §16

   $f_a(0) = 6\cdot e^{-0,5\cdot 0} - a\cdot 0 = 6\cdot 1 - 0 = 6$ unabhängig von a;

   Also: Gemeinsamer Schnittpunkt aller Graphen der Schar mit der y-Achse: S(0|6)

   $f_a'(x) = -0,5\cdot 6\cdot e^{-0,5\cdot x} - a = -3\,e^{-0,5\cdot x} - a < 0$ ($e^{-0,5\cdot x} > 0$ für alle $x \in$ IR und $a > 0$)

   Damit sind alle Graphen der Schar streng monoton fallend.

   $\lim_{x\to+\infty} f_a(x) = \lim_{x\to+\infty}(6\underbrace{e^{-0,5x}}_{\to 0}\underbrace{-ax}_{\to-\infty}) = -\infty$

b) Newtonverfahren: Skript §07 Punkt 4.

Es gilt: $x_1 = x_o - \frac{f(x_o)}{f'(x_o)}$

$f_a'(x) = -3\,e^{-0,5\cdot x} - a$ (aus a))

$x_0 = 0$

$f_a'(0) = -3\,e^{-0,5\cdot 0} - a = -3 \cdot 1 - a = -3 - a$

$f_a(0) = 6$ (aus a))

$x_1 = 0 - \frac{6}{-3-a} = \frac{6}{3+a}$