Teil 1

1. *Gegeben ist die Funktion* $f: x \mapsto \frac{2x+3}{4x+5}$ *mit maximaler Definitionsmenge D.*

Definitionsmenge:
„BWL“ – Bruch: Nenner nullsetzen Skript Kurvendiskussion 1. Trainingsblatt 01
$4x + 5 = 0$ $x = -1{,}25$ $D = IR \backslash \{-1{,}25\}$

Ableitung
Quotientenregel: Skript §05 | 2. Arbeitsblatt 02

$$f'(x) = \frac{(4x+5)\cdot 2 - 4\cdot(2x+3)}{(4x+5)^2} = \frac{8x+10-8x-12}{(4x+5)^2} = \frac{-2}{(4x+5)^2}$$

Vorletzter Schritt: Minus vor 4 vor der Klammer wird mit der 4 in die Klammer multipliziert.

2. **Stammfunktion**
Stammfunktion einer Funktion f ist jede Funktion, deren Ableitung mit f übereinstimmt, also F ableiten und mit f vergleichen: Skript §14.

$$F: x \,\alpha\, \frac{1}{4}x^2\cdot(2\ln x - 1)$$

Produktregel anwenden Skript §05 | 1. Ableitung ln-Funktion: Skript §05 | 2.

$$F'(x) = \frac{1}{4}\cdot 2x \bullet (2\ln x - 1) + \frac{1}{4}x^2 \bullet \left(2\cdot\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{2}x\cdot(2\ln x - 1) + \frac{1}{4}x\cdot 2 =$$

$$= x\cdot\ln x - 1\cdot\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}x = x \ln x$$

Also: F ist Stammfunktion von f.

Stammfunktion mit Nullstelle x = 1
Es gibt zu einer Funktion f beliebig viele Stammfunktionen, die sich nur in der additiven Konstante C unterscheiden. Die Menge aller Stammfunktionen von f ist also:

$$F_C: x \mapsto \frac{1}{4}x^2\cdot(2\ln x - 1) + C$$

Nullstelle ist der x-Wert, für den der Funktionsterm ist Null ist. Also muss man x = 1 einsetzen, den Term Null setzen und dann C ermitteln.
$F_C(1) = 0$

$$\frac{1}{4}\cdot 1^2\cdot(2\ln 1 - 1) + C = 0$$ Beachte: ln1 = 0

$$\frac{1}{4}\cdot(2\cdot 0 - 1) + C = 0$$

$$-\frac{1}{4} + C = 0 \qquad C = \frac{1}{4}$$

also: Gesucht ist $F_{\frac{1}{4}}: x \,\alpha\, \frac{1}{4}x^2\cdot(2\ln x - 1) + \frac{1}{4}$

3. Es müssen die Jahreszahlen jeweils für x und die Anzahlen jeweils für den gesamten Term gesetzt werden (Modellieren von Funktionen). Das führt zu 2 Gleichungen, die dann nach den gesuchten Größen aufgelöst werden. 6,1 Milliarden: $6{,}1\cdot10^9$:
Exponentialfunktion: Skript §12 | Modellieren: Skript §15 | Wachstum Skript §22

$N(x) = N_o\, e^{k\cdot(x-2000)}$

Im Jahr 2000:

$6{,}9\cdot10^9 = N_o\, e^{k\cdot(2000-2000)}$

$6{,}9\cdot10^9 = N_o\, e^{k\cdot 0}$ Beachte: $e^0 = 1$

$6{,}9\cdot10^9 = N_o$

Im Jahr 2010:

$6{,}1\cdot10^9 = N_o\, e^{k\cdot(2010-2000)}$

$6{,}1\cdot10^9 = N_o\, e^{k\cdot 10}$ $N_o = 6{,}9\cdot10^9$ einsetzen

$6{,}1\cdot10^9 = 6{,}9\cdot10^9\cdot e^{10k}$

$$\frac{6{,}1\cdot10^9}{6{,}9\cdot10^9} = e^{10k}$$

$$e^{10k} = \frac{61}{69} \quad |\ \ln\ldots$$

$$10k = \ln\left(\frac{61}{69}\right) \qquad k = 0{,}1\cdot\ln\left(\frac{61}{69}\right) \approx 0{,}012$$

4. $\int_0^{\pi} \sin(2x)dx = 0$.

a) Das Integral entspricht der Flächenbilanz im Intervall [0; π]. Damit das Integral den Wert 0 hat, müssen die Flächenstücke oberhalb der x-Achse denselben Inhalt wie die unter der x-Achse haben. Wegen der Symmetrie der Funktion sin(2x) sind diese Stücke gleich groß.

b) Stammfunktionsterm von f(x) = sinx ist: F(x) = –cosx Skript §20 | S.43

Stammfunktionsterm von g(x) = f(ax + b) ist $G(x) = \frac{1}{a}F(ax+b)$ (s. Merkhilfe)

In diesem Fall ist b = 0 und a = 2

Also: $$\int_0^{\pi}\sin(2x)dx = \left[-\frac{1}{2}\cos(2x)\right]_0^{\pi} = \left(-\frac{1}{2}\cos(2\cdot\pi)\right) - \left(-\frac{1}{2}\cos(2\cdot 0)\right) =$$

$$= \left(-\frac{1}{2}\cdot 1\right) - \left(-\frac{1}{2}\cdot 1\right) = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 0$$

Teil 2

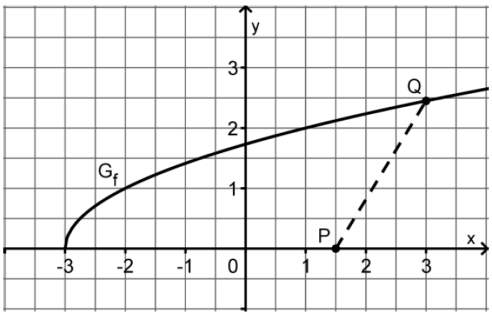


Abb. 1

1. a) **Definitionsmenge:**

„BWL" – Wurzel: Radikant größer gleich Null setzen

Skript Kurvendiskussion 1. Trainingsblatt 01

$x + 3 \geq 0$

$x \geq -3$ $\quad D = [-3; \infty[$

Verschiebung:

Der Graph von w ist lediglich um 3 in negative x-Richtung (nach links) verschoben worden.

b) Satz des Pythagoras anwenden: Katheten sind die Strecken in x- bzw. y-Richtung (Differenz der jeweiligen Koordinaten); Hypotenuse ist d(x)

$c^2 = a^2 + b^2$

$[d(x)]^2 = (x - 1{,}5)^2 + (f(x) - 0)^2$ f(x) einsetzen und Wurzel ziehen

$d(x) = \sqrt{(x-1{,}5)^2 + \left(\sqrt{x+3} - 0\right)^2}$ Binomische Formel (1. Summand)
Wurzel quadrieren (2. Summand)

$d(x) = \sqrt{(x^2 - 3x + 2{,}25) + (x+3)}$ zusammenfassen

$d(x) = \sqrt{x^2 - 2x + 5{,}25}$

c) Es muss d(x) minimiert werden. Extremwertproblem: Skript §14

Eine Wurzel ist immer dann minimal, wenn der Radikant, hier also $r(x) = x^2 - 2x + 5{,}25$ (Zielfunktion) minimal ist.

Ableiten: $r'(x) = 2x - 2$
$r''(x) = 2$

Bedingung: $r'(x) = 0$
$2x - 2 = 0$
$x = 1$

Art: $r''(1) = 2 > 0$ => Minimum

y-Koordinate $f(1) = \sqrt{1+3} = \sqrt{4} = 2$
$Q_E(1|2)$

Es geht um den Graphen von f, also nicht in d(x) einsetzen, sondern in f(x)

d) Für die Steigungen zweier aufeinander senkrechter Geraden gilt: $m_1 \cdot m_2 = -1$

Steigung einer Gerade durch die Punkte P und Q: $m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_P - y_Q}{x_P - x_Q}$

Steigung der Tangente an den Graphen im Punkt $Q(x_Q|y_Q)$: $m = f'(x_Q)$

<u>Steigung der Verbindungsstrecke:</u> $m_1 = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_P - y_Q}{x_P - x_Q} = \frac{0-2}{1{,}5-1} = \frac{-2}{0{,}5} = -4$

Steigung der Tangente: $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x+3}} \cdot 1 = \frac{1}{2\sqrt{x+3}}$

$m_2 = f'(1) = \frac{1}{2\sqrt{1+3}} = \frac{1}{4}$

Senkrechtstehen: $m_1 \cdot m_2 = -4 \cdot \frac{1}{4} = -1$; q.e.d.

e) Das Flächenstück kann man durch die rote Strecke in 2 Teilflächen zerlegen: die linke Teilfläche ist das Integral $\int_{-3}^{1} f(x)dx$ und die rechte ein rechtwinkliges Dreieck mit der Höhe 2 und der Grundseite 0,5.

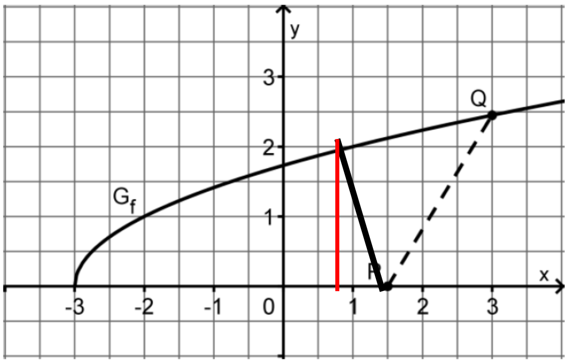


Abb. 1

$$A = \int_{-3}^{1} f(x)dx + \frac{1}{2} \cdot g \cdot h$$

Nebenrechnung zum Auffinden des Terms einer Stammfunktion:

Es gilt: $f(x) = \sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$ => $F(x) = \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + C = \frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} + C$

Damit könnte der Term $\frac{2}{3}(x+3)^{\frac{3}{2}}$ Stammfunktionsterm von f sein.

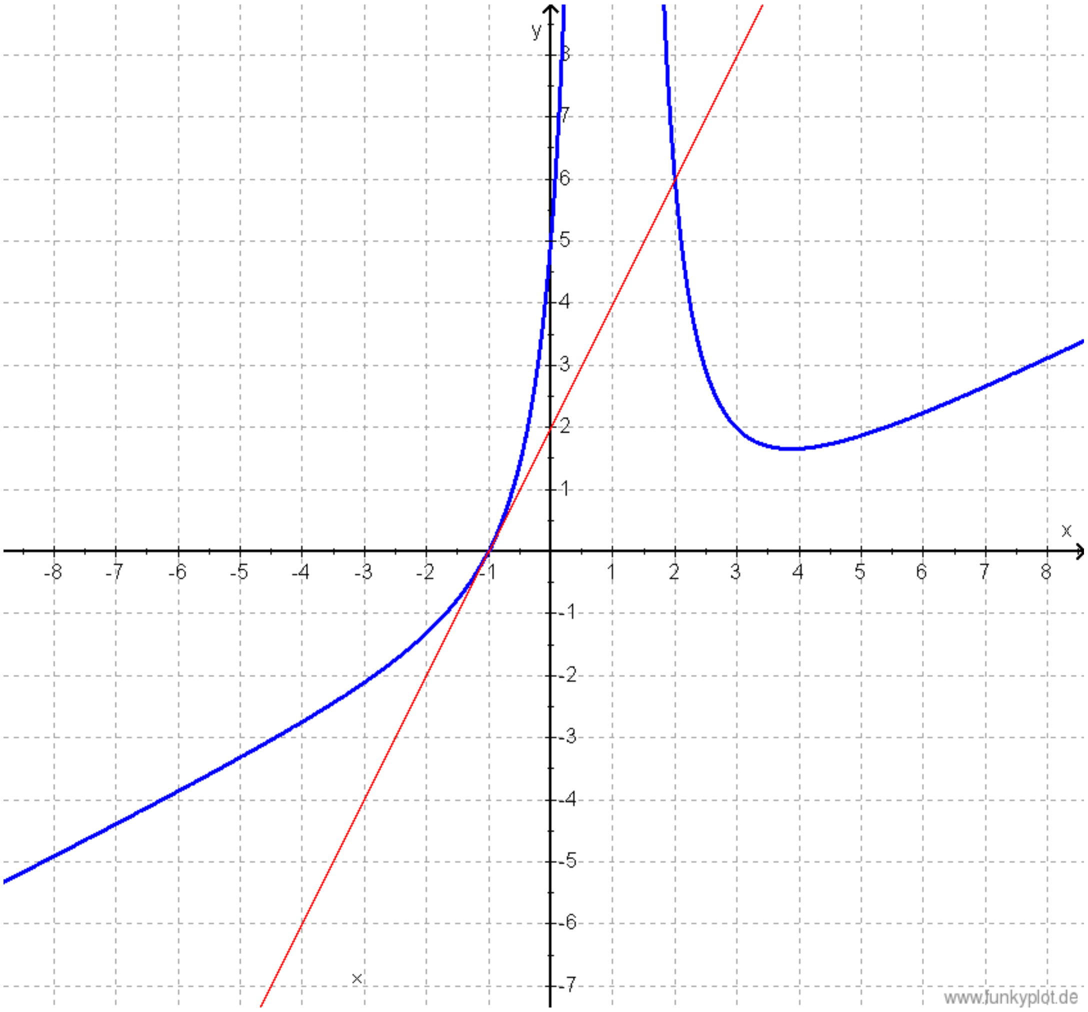
Ableiten: $\left[\frac{2}{3}(x+3)^{\frac{3}{2}}\right]' = \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{2}(x+3)^{\frac{1}{2}} = (x+3)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{x+3} = f(x)$

Damit ist der Term $F(x) = \frac{2}{3}(x+3)^{\frac{3}{2}}$ Term einer Stammfunktion von f.

Fläche: $A = \int_{-3}^{1} f(x)dx + \frac{1}{2} \cdot g \cdot h = \left[\frac{2}{3}(x+3)^{\frac{3}{2}}\right]_{-3}^{1} + \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 0{,}5 =$

$$\left[\frac{2}{3}(1+3)^{\frac{3}{2}}\right] - \left[\frac{2}{3}(-3+3)^{\frac{3}{2}}\right] + 0{,}5 = \left[\frac{2}{3} \cdot 4^{\frac{3}{2}}\right] - \left[\frac{2}{3} \cdot 0^{\frac{3}{2}}\right] + 0{,}5 = 5\frac{5}{6}$$

2. Abbildung 2 zeigt den Graphen G_g einer in $\mathbb{R}\backslash\{1\}$ definierten gebrochen-rationalen Funktion g mit folgenden Eigenschaften:
   - Die Funktion g hat in x = 1 eine Polstelle ohne Vorzeichenwechsel;
   - G_g verläuft stets oberhalb seiner schrägen Asymptote, die durch die Gleichung y = 0,5x – 1 gegeben ist;
   - die einzige Nullstelle von g ist x = –1;

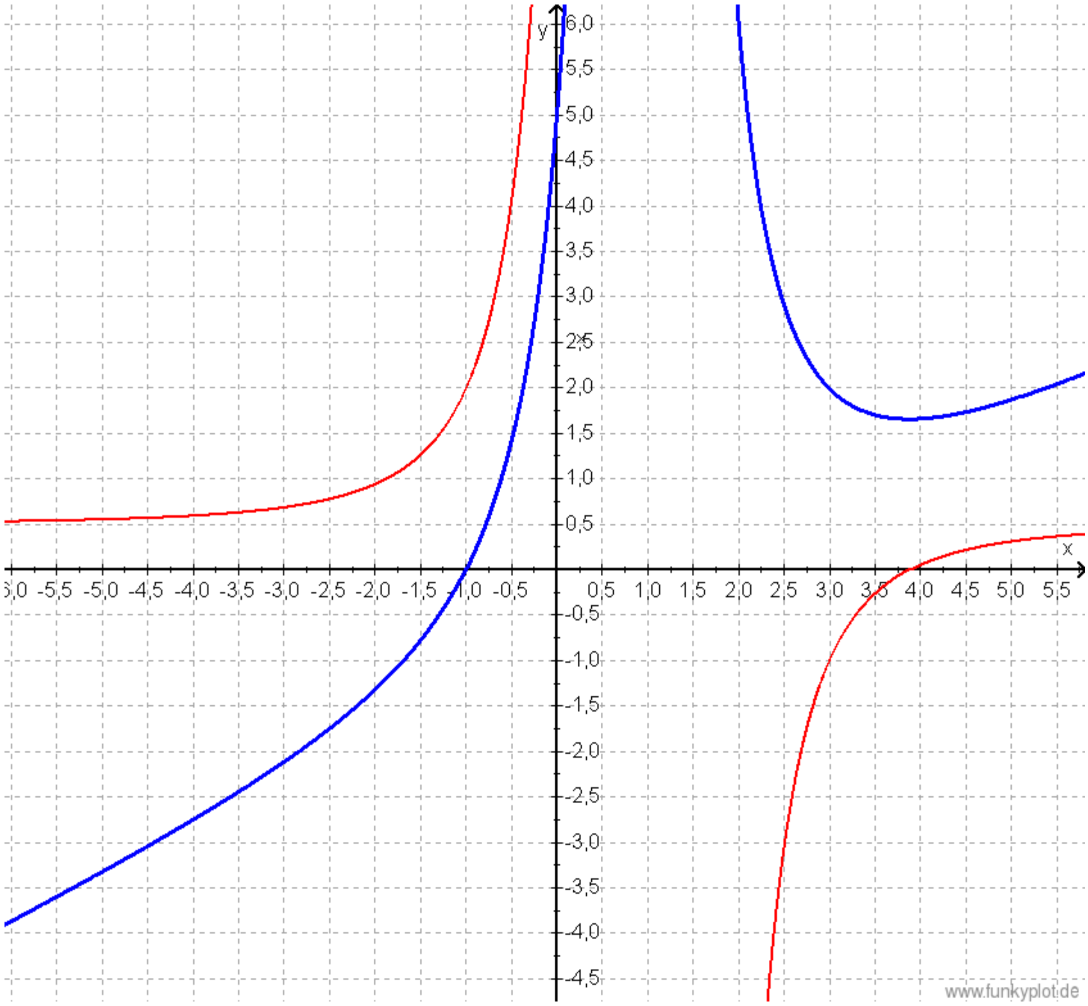


a) Man zeichnet die Tangente im Punkt P(–1|0) ein (rote Gerade) und bestimmt ihre Steigung f‘(–1) = 2

Die schräge Asymptote hat die Steigung m = 0,5. Damit ergibt sich:

$$\lim_{x \to \pm\infty} g'(x) = 0{,}5$$

Graph der Ableitung (rot):



b) I. $y = x - 1 + \frac{a}{(x-1)^2}$ II. $y = \frac{1}{2}x - 1 + \frac{a}{x-1}$ III. $y = \frac{1}{2}x - 1 + \frac{a}{(x-1)^2}$

Begründung gegen I. und II.

I. Die schräge Asymptote hat hier die Gleichung y = x – 1 und damit die Steigung m = 1 statt 0,5.

II. Der Nenner x – 1 = $(x – 1)^1$ hat den ungeraden Exponenten 1. Die Polstelle muss aber von gerader Ordnung sein, da es keinen VZW gibt, wie man im Graphen bei x = 1 sehen kann.

Passender Wert von a

Man setzt einen bekannten Punkt des Graphen (z.B. P(–1|0)) in den Term ein und berechnet damit den Parameter a:

g(–1) = 0

$$\frac{1}{2}\cdot(-1) - 1 + \frac{a}{(-1-1)^2} = 0$$

$$-\frac{3}{2} + \frac{a}{4} = 0$$

$\frac{a}{4} = \frac{3}{2}$ a = 6

c) **Definitionsmenge:**

„BWL" – Logarithmus: Argument größer als Null Skript Kurvendiskussion 1.

Da das Argument g(x) ist, muss man wissen, für welche x-Werte der Term g(x) definiert ist und größer als Null ist.

g(x) > 0 für x > –1 (S. Graph und Nullstelle aus Aufgabe a).)

Außerdem ist x = 1 eine Definitionslücke von g.

Damit: $D_h =]-1; \infty[\setminus \{1\}$

Grenzverhalten:

Zu betrachten sind die Grenzen –1; 1^-; 1^+ und +∞ Das Verhalten von g erkennt man jeweils aus dem Graphen.

$$\lim_{x\to-1} h(x) = \lim_{x\to-1} \underbrace{\ln\Big(\underbrace{g(x)}_{\to 0}\Big)}_{\to-\infty} = -\infty$$

$$\lim_{x\to1^-} h(x) = \lim_{x\to1^-} \underbrace{\ln\Big(\underbrace{g(x)}_{\to +\infty}\Big)}_{\to+\infty} = +\infty \qquad \lim_{x\to1^+} h(x) = \lim_{x\to1^+} \underbrace{\ln\Big(\underbrace{g(x)}_{\to +\infty}\Big)}_{\to+\infty} = +\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} h(x) = \lim_{x\to+\infty} \underbrace{\ln\Big(\underbrace{g(x)}_{\to +\infty}\Big)}_{\to+\infty} = +\infty$$

verbotene Rechnungen: Skript Kurvendiskussion 4.

Nullstelle von h:

Eine ln-Funktion ist Null, wenn ihr Argument den Wert 1 annimmt. (ln1 = 0)

Also muss man im Graphen ablesen, für welche x-Werte der y-Wert 1 ist.

Dies ist bei etwa x = –0,6 der Fall.

Nullstelle: x ≈ –0,6